

ANNALEN
DES
PHYSIK.

E. F. BRAUER, L. W. GRÄTZ, L. W. FRANCKE, C. L. KLEINER, P. KÖHLER

VIERTE FOLGE.

Band 46. Heft 1.

WER GÄLTEN SIEHEN DER KÄRTEIN 1. FOLGE

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, H. WARMUTH.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1914.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH,
DÖRMERSTRASSE 10.

Die Preise auf die "Annalen" werden auf den
Preis der "Zeitschrift für Physik" umgerechnet und den der Verlag für die gesamte Ausgabe
(ca. 3 Bände) auf die Preise der "Annalen" umgerechnet.

Inhalt.

	Seite
1. Carl Bergholm. Über Doppelbrechung in kathodenzerstübten Metallschichten	1
2. J. E. Lilienfeld. Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum	24
3. J. Stark. Bemerkung zu einer Mitteilung der Herren E. Wagner und J. Kutschewski über „Feldkanalstrahlen“	47
4. P. Debye. Interferenz von Röntgenstrahlen und Wärmebewegung	49
5. Chr. Füchtbauer und W. Hofmann. Über Maximalintensität, Dämpfung und wahre Intensitätsverteilung von Serienlinien in Absorption	96
6. Georg Paech. Über die Abhängigkeit der Lichtelektrizität der Metalle vom Gas	135
7. M. v. Laue. Zur Theorie der optischen Abbildung	165

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzungen derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagebuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzusiechen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 43.

Wolken und Zirkel

aus dem Himmel

aus dem

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BERÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 43.

DER GANZEN REIHE 348. BAND.

18735

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEgeben VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ZWÖLF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1914.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

УЧИЛЕНЬЯ ПЕЧАТЬ

Способъ изъявленія въ письмѣ
запроса о выдачѣ паспорта

1. Паспортъ

2. Паспортъ

3. Паспортъ

4. Паспортъ

5. Паспортъ

6. Паспортъ

7. Паспортъ

Паспортъ

Паспортъ

1. Паспортъ

2. Паспортъ

3. Паспортъ

4. Паспортъ

5. Паспортъ

6. Паспортъ

Паспортъ

Inhalt.

Vierte Folge. Band 43.

Erstes Heft.

	Seite
1. Carl Bergholm. Über Doppelbrechung in kathodenzerstäubten Metallschichten	1
2. J. E. Lilienfeld. Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum	24
3. J. Stark. Bemerkung zu einer Mitteilung der Herren E. Wagner und J. Kutschewski über „Feldkanalstrahlen“	47
4. P. Debye. Interferenz von Röntgenstrahlen und Wärmebewegung	49
5. Chr. Füchtbauer und W. Hofmann. Über Maximalintensität, Dämpfung und wahre Intensitätsverteilung von Serienlinien in Absorption	96
6. Georg Paech. Über die Abhängigkeit der Lichtelektrizität der Metalle vom Gas	135
7. M. v. Laue. Zur Theorie der optischen Abbildung	165

Ausgegeben am 31. Dezember 1913.

Zweites Heft.

1. H. M. Hansen. Über die Begleiterscheinungen des inversen Zeeman-Effektes (die longitudinale zirkulare und transversale lineare Doppelbrechung) zwischen den Komponenten einer zerlegten Absorptionslinie. (Hierzu Tafel I u. II)	169
2. George Jaffé. Über den Einfluß der Diffusion auf die Leitfähigkeit ionisierter Gase in einem ebenen Kondensator	249
3. F. Henning. Die Fixierung der Temperaturskala zwischen 0 und -193°	282
4. A. Harnack. Zur Theorie des bewegten Spiegels. II.	295
5. A. R. Colley. Zur Abhandlung des Hrn. Rukop: „Messungen im elektromagnetischen Spektrum des Wassers mit wenig gedämpften, durch Stoßregung hervorgebrachten Schwingungen von 65 bis 20 cm Wellenlänge“	309
6. J. Stark. Ultraviolette Emissionsbanden des ein-, zwei- und dreiatomigen Sauerstoffmoleküls. (Hierzu Tafel III)	319

Ausgegeben am 23. Januar 1914.

Drittes Heft.	Seite
1. G. Quincke. Reichweite, Ablenkung und Interferenz gebrochener elektrischer Strahlen. (Hierzu Tafel IV.)	337
2. G. Quincke. Brechung, Reflexion und Interferenz elektrischer Strahlen. (Hierzu Tafel V.)	393
3. G. Quincke. Elektrische Schaumwände der Materie	411
4. L. Myssowsky und K. Nesturch. Stoßweise Spitzementladungen und die elektrische Methode der Zählung der α -Teilchen	461
5. K. Schaposchnikow. Die ponderomotorischen Drehwirkungen der Lichtwelle und das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung	473

Ausgegeben am 10. Februar 1914.

Viertes Heft.	Seite
1. J. Zenneck. Die Entstehung der Schwingungen bei der Lichtbogenmethode	481
2. H. Hörig. Über die elektromotorische Kraft im Temperaturgefälle eines Metalls. Versuche an Silber und Nickel. (Hierzu Tafel VI.)	525
3. Harry C. Jones und J. Sam Guy. Eine quantitative Untersuchung der Absorptionsspektren von Lösungen mittels des Radiomikrometers	555
4. G. Wietzel. Das thermoelektrische Verhalten der Metalle bei tiefen Temperaturen	605
5. M. Milankovitch. Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre	623
6. C. W. Oseen. Über die Möglichkeit ungedämpfter Schwingungen nach der Maxwell-Lorentzschen Theorie und über die Plancksche Strahlungstheorie	639
7. P. Ludewig. Die elektrischen Bedingungen beim Übergang vom Bogen- zum Funkenspektrum	652

Ausgegeben am 27. Februar 1914.

Fünftes Heft.	Seite
1. Wilhelm Hammer. Über eine direkte Messung der Geschwindigkeit von Wasserstoffkanalstrahlen und über die Verwendung derselben zur Bestimmung ihrer spezifischen Ladung	653
2. H. Kröncke. Über die Messung der Intensität und Härte der Röntgenstrahlen	687
3. E. Merkel. Über die Wechselstromentladung geringer Stromstärke zwischen Metallelektroden	725
4. W. Lenz. Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen	749
5. Otto Szász. Mathematischer Beitrag zur vorstehenden Abhandlung des Hrn. Lenz (Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen)	798
6. A. D. Fokker. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld	810

Ausgegeben am 13. März 1914.

Inhalt.

VII

Sechstes Heft.

	Seite
1. G. Rümelin. Über die Wiedervereinigung von Gasionen	821
2. F. Paschen. Ultrarot-Monochromatfilter	858
3. Kobayashi-Iwao. Über den Einfluß der Dämpfung auf die Beugung elektrischer Wellen an einem dielektrischen Zylinder	861
4. Artur Rosenthal. Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasiergodenhypothese	894
5. Walter Küpper. Einfluß von Röntgen-, ultravioletten, Brecherelstrahlen und des elektrischen Wechselfeldes auf die Schallgeschwindigkeit in Gasen	905
6. B. Weinstein. Zu Minkowskis Mechanik. Die Weltkonstante, die Systemmechanik	929
7. W. Wien. Über die Frage, ob die Kanalstrahlen bei der Lichterregung Bewegungsenergie übertragen	955

Ausgegeben am 20. März 1914.

Siebentes Heft.

1. J. Stark. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. I. Quereffekt	965
2. J. Stark und G. Wendt. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. II. Längseffekt	983
3. J. Stark und H. Kirschbaum. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. III. Abhängigkeit von der Feldstärke. (Hierzu Tafel VII.)	991
4. J. Stark und H. Kirschbaum. Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IV. Linienarten, Verbreiterungen. (Hierzu Tafel VIII u. IX.)	1017
5. Alfred Coehn und Hermann Mozer. Über die Berührungs-elektrizität von Gasen gegen leitende und nichtleitende Flüssigkeiten. (Hierzu Tafel X.)	1048
6. G. Gottstein. Über die Gültigkeit der thermodynamischen Beziehungen für Peltierwärme und Thomsonwärme und über die galvano- und thermomagnetischen Effekte bei variablen Leitern	1079
7. Gunnar Nordström. Die Fallgesetze und Planetenbewe-gungen in der Relativitätstheorie	1101
8. Joseph Peterson. Nochmals eine Bemerkung über den Ursprung subjektiver Kombinationstöne	1111
Berichtigung	1116

Ausgegeben am 2. April 1914.

Achtes Heft.

1. A. Ignatieff. Interferometrische Wellenlängenmessungen im Ultrarot	1117
2. W. Voigt. Über die Zeeman-Effekte bei mehrfachen Serien-linien, besonders auch bei dem O-Triplet $\lambda = 3947$	1137

	Seite
3. W. Jaeger und H. von Steinwehr. Das Quecksilberwiderstands-Thermometer als reproduzierbare, empirische Temperaturskala	1165
4. C. Cranz und Br. Glatzel. Die Ausströmung von Gasen bei hohen Anfangsdrucken. I. Teil. (Hierzu Tafel XI u. XII.)	1186
5. J. Koenigsberger. Über Messungen des Reflexionsvermögens und Bestimmung der optischen Konstanten	1205
6. F. Paschen und K. Meissner. Zur Kenntnis der Serien in den Spektren von Indium und Gallium	1223
7. K. Foersterling u. V. Fréedericksz. Dispersion und Absorption von amorphen und metallischen Selen	1227
8. Hans Vogel. Über die Viskosität einiger Gase und ihre Temperaturabhängigkeit bei tiefen Temperaturen	1235

Ausgegeben am 16. April 1914.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I u. II.	H. M. Hansen.
III.	J. Stark.
„ IV u. V.	G. Quineke.
„ VI.	H. Hörig.
„ VII—IX.	J. Stark und H. Kirschbaum.
„ X.	A. Coehn und H. Mozer.
„ XI u. XII.	C. Cranz und Br. Glatzel.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 43.

1. *Über Doppelbrechung in kathodenzerstäubten Metallschichten;*
von Carl Bergholm.

(Vorläufige Mitteilung.)

Wenn man eine Glasplatte in ein Entladungsrohr so einführt, daß ihre Ebene senkrecht zu einer blattförmigen Kathode steht, erhält man, wenn ein elektrischer Strom durch das Rohr eingeführt wird, auf der Glasplatte eine dünne, keilförmige Metallschicht, die in bezug auf die Kathode symmetrisch ist. Solche Metallschichten sind doppelbrechend.

Auf Aufforderung des Präfekten des hiesigen physikalischen Instituts, des Hrn. Prof. G. Granqvist, habe ich die Doppelbrechung in solchen Schichten für verschiedene Farben untersucht. Ehe ich Bericht über diese Untersuchung erstatte, erlaube ich mir, dem Hrn. Prof. G. Granqvist meinen herzlichen Dank zu sagen, sowohl für die Anregung, mich diesem Gebiet der Forschung zuzuwenden, als für all die wertvollen Ratschläge, die mir bei der Ausarbeitung zuteil geworden sind.

Die Doppelbrechung solcher Metallschichten ist mehrmals untersucht worden. Infolge unvollkommener Methoden der Messung sind die quantitativen Resultate unsicher und teilweise falsch geworden.

Kundt¹⁾ wies die Doppelbrechung nach, indem er die Schicht zwischen zwei gekreuzte Nicols einführte. Dessau²⁾ konnte durch Dilatieren einer Glasplatte feststellen, daß die Geschwindigkeit in „tangentieller“ Richtung in allen Metallschichten am größten ist. Der erste, dem es gelang, die Phasendifferenz zu messen und wenigstens eine Vorstellung ihrer Größe zu geben, war G. Granqvist.³⁾ Gleichzeitig wies

1) A. Kundt, Wied. Ann. 27. p. 59. 1885.

2) B. Dessau, Wied. Ann. 29. p. 353. 1886.

3) G. Granqvist, K. Vet.-Akad. Förhandl. 10. p. 575. 1897.

er auch nach, daß die Absorption in zwei zueinander senkrechten Richtungen nicht dieselbe war, und daß, um doppelbrechende Schichten zu erhalten, die Verdünnung weit fortgeschritten sein und die Glasplatte sich in der Nähe der Kathode befinden mußte. Kaempf¹⁾ benutzte eine bedeutend empfindlichere Methode als Granqvist, um die Phasendifferenz zu messen, aber die Fehlergrenze betrug trotzdem 30 Proz. Es gelang ihm, durch Messung nachzuweisen, daß die Phasendifferenz für weißes Licht für Pt-Schichten von dem Abstande von der Kathode abhing und fand, daß das Maximum der Doppelbrechung etwa 15 mm weit von der Kathode war. Kaempf glaubte weiter erwiesen zu haben, daß die Doppelbrechung allmählich abnahm, obgleich die chemischen Eigenschaften der Schicht dieselben waren. Daß die Doppelbrechung bei Oxydierung verschwindet, hatte schon Kundt nachgewiesen. Rumpelt²⁾ benutzte dieselbe Methode der Messung wie Kaempf und wies dadurch nach, daß die Doppelbrechung an einer Stelle von der Farbe des Lichtes abhing. Diese wurde für Gold, Kupfer, Silber und Platin gemessen. Er fand, daß die Phasendifferenz in Gold-, Kupfer- und Platinschichten am größten für Rot und am kleinsten für Blau war. Bei Silber war sie am größten für Gelb und am kleinsten für Blau. Hieraus schließt er, daß die Phasendifferenz nicht von dem Brechungsexponenten, sondern von dem Absorptionskoeffizienten abhängt. Er sagt: „Da die Absorption im allgemeinen mit der Wellenlänge abnimmt, so ergibt sich die stets beobachtete Tatsache, daß die Doppelbrechung für blaues und violettes Licht sehr gering wird.“ Unter der Kante des Kathodenblechs glaubte er bisweilen bemerkt zu haben, daß die Doppelbrechung ein anderes Zeichen als weiter weg von der Kathode hatte. Aber die Phasendifferenz an dieser Stelle war so klein, daß er sie nicht messen konnte.

Über die Ursache der Doppelbrechung in solchen Metallschichten gibt es mehrere verschiedene Theorien. Kundt und Granqvist sind der Ansicht, daß die Metallschicht elektrostatischer Kräfte wegen eine kristallinische Struktur annehme.

1) F. Kaempf, Ann. d. Phys. **16**. p. 308. 1905.

2) H. Rumpelt, Ann. d. Phys. **28**. p. 621. 1909.

Kaempf glaubt, daß die Ursache der Doppelbrechung eine elastische Spannung sei, die durch Bombardierung der Molekül-aggregate durch die Kathode entstanden sei. Diese Teilchen werden nämlich deformiert, wenn sie die Platte treffen, und dann festgehalten, wodurch in jedem Teil eine Spannung entstehen soll. Rumpelt wies nach, daß Kaempfs Annahme falsch war, und dachte sich die Metallschicht aus aufeinander gelagerten Würfeln gebaut, welche in „tangentieller“ dichter als in „radialer“ Richtung liegen. Indem er auf dieses System die von O. Wiener¹⁾ abgeleiteten Formeln für lamellare Doppelbrechung anwendet, findet er eine Formel, die annähernd seine experimentellen Resultate wiedergibt.

Versuchsanordnungen.

Das Entladungsgefäß war bei diesem Versuch eine Kugel mit einem Radius von 8 cm und mit drei Schliffen versehen. Durch den einen, der einen Diameter von 2,5 cm hatte, wurde die Glasplatte eingef  rt. Diese bestand zuerst aus dünnem Spiegelglas (Länge 12 cm, Breite 2,3 cm), aber wurde später gegen 0,1 mm dicke, 5 cm lange und 2 cm breite Glasplatten ausgetauscht, die beim Einf  ren mittels einer dünnen kupfernen Feder an die erwähnte Platte aus Spiegelglas befestigt wurden. Durch denselben Schliff wurde auch das Kathodenblech eingef  rt, welches vertikal und rechtwinkelig zu der Glasplatte hing. Der zweite Schliff führte zu einer Wasserstoffbombe, einem Manometer und einer Rotationspumpe. Mittels des dritten stand das Entladungsrohr in beständiger Verbindung mit einem mit P_2O_5 gef  llten Gefäß. Ehe die Entladung anfing, wurde mehrmals trockener Wasserstoff eingef  rt, und wenn das Metall verhältnismäßig schwer zu zerstäuben war, führte man auch Wasserstoff zwischen den Entladungen ein, welche nie länger als 15 Sekunden dauerten. Dies geschah, um zu verhüten, d ss die Glasplatte durch die Kathodenstrahlen zu warm und dadurch doppelbrechend wurde. Nachdem die Entladung aufgehört hatte, wurde immer nur trockene Luft eingef  rt, und das Entladungsrohr stand nur so lange offen, als für das Herausnehmen und Einlegen der

1) O. Wiener, *Physik. Zeitschr.* 5. p. 332. 1904.

Platte notwendig war. Wenn man ein neues Metall als Kathode anwenden wollte, mißglückte gewöhnlich die erste Schicht, was vermutlich darauf beruhte, daß die Luft, die die Platte absorbiert hatte, ausgetrieben wird und das Metall oxydiert. Um dies zu vermeiden, wurde das Blech als Kathode eingesetzt und entlud sich eine recht lange Zeit hindurch. Dann wurde das Blech nur so lange in die Luft herausgenommen, als nötig war, um die Glasplatte einzuführen, welche sehr genau gereinigt und untersucht worden war, ob sie infolge der Spannung des Glases doppelbrechend wäre. Nachdem man die Phasendifferenz der Schicht gemessen hatte, wurde das Glas gereinigt und untersucht, ob es während der Bildung der Schicht doppelbrechend geworden wäre. Die erforderliche Spannung erhielt man von einem Induktorium.

Im Anfang war es meine Absicht, nur einen Orientierungsversuch zu machen, und deshalb ist ein Induktorium angewendet worden, obgleich die Verhältnisse in dem Entladungsrohr dann wenig konstant werden. Bei der Fortsetzung des Versuches ist es meine Absicht, Gleichstrom anzuwenden, und das Entladungsgefäß wird so beschaffen sein, daß es möglich ist, den Potentialfall an verschiedenen Punkten im Raum um die Kathode zu messen.

Um die Phasendifferenz der Metallschichten zu messen, wurde zuerst ein Versuch mit der Methode Granqvists gemacht, aber diese ist nicht für Messungen angewandt worden.

Danach wurden mehrere Versuche mit der von Kaempf und Rumpelt angewandten Methode gemacht, teils um die Größe des Fehlers mit dieser Anordnung zu bestimmen, damit es möglich wurde, den Wert der Messungen Rumpelts zu kontrollieren, teils weil diese Methode angewandt worden ist, um das gebrauchte Instrument zu gradieren. Die Anordnung geht aus der nachstehenden schematischen Figur hervor.

Die Strahlen von der Bogenlampe (*A*) werden mit Hilfe der Linse (*B*) parallel gemacht. Das Licht, welches durch den Polarisator (*C*) gegangen ist, wird in der Metallschicht (*D*) elliptisch polarisiert. Indem man die Glimmerplatte (*E*) in ihrer eigenen Ebene dreht, kann man bewirken, daß das Licht von derselben geradlinig polarisiert wird. Bei einer gewissen Stellung des Analysators wird das Gesichtsfeld dunkel. Wenn

die Absorption nach beiden Richtungen dieselbe ist, gilt nach Kaempf die Gleichung:

$$\sin \varepsilon = \sin 2\alpha \sin \delta.$$

ε = die Phasendifferenz in der Metallschicht,

δ = die Phasendifferenz in der Glimmerplatte,

α = der Winkel zwischen der Drehung des Glimmers und des Analysators.

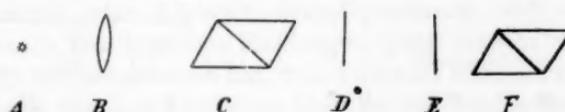


Fig. 1.

Es erwies sich, daß mit dieser Methode die Ablesungen sehr unsicher waren, da das durchgehende Licht sowohl durch die Metallschicht als durch gefärbtes Glas geschwächt wurde. Das Gesichtsfeld blieb auch bei verhältnismäßig großen Drehungen des Analysators dunkel, und der Durchschnittsfehler des Resultats betrug mehr als 25 Proz.

Rumpelt gibt die folgende Tabelle über seine Messungen einer Platinschicht:

Farbe	Phasendifferenz
Rot	0,035
Gelb	0,031
Grün	0,027

Für Blau hat er keinen Wert betreffend Platin. Alle von ihm beobachteten Werte für Platin liegen innerhalb derselben Fehlergrenze. Rumpelts Messungen der Phasendifferenz in Platinschichten sind also unsicher.

Wenn die Lichtstärke, die durch das Instrument hindurchgeht, groß ist, ist diese Methode recht genau. Der Maximalfehler beträgt dann nur einige Prozente.

Um die Phasendifferenz in den Metallschichten zu messen, habe ich nur eine von Brace¹⁾ erfundene Methode angewandt, die sehr empfindlich ist. Die Anordnung geht aus der folgenden Figur hervor.

Das Licht erhielt man von einer sehr lichtkräftigen Bogen-

1) D. B. Brace, Phys. Rev. 18. p. 70. 1904.

lampe (*A*), die mit einem Strom von 12 Amp. und 80 Volt gespeist wurde. Die Linse (*B*) wird so plaziert, daß das Bild der Lichtquelle einige Dezimeter hinter den Analysator (*G*) fällt. Der Polarisator (*C*) und der Analysator (*G*) sind die ganze Zeit gekreuzt. Die Glimmerplatte (*D*) ist sehr dünn, hat eine Größe von nur einigen Quadratmillimetern und deckt

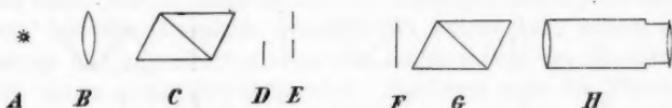


Fig. 2.

das halbe Gesichtsfeld. Sie wird an eine 0,1 mm dicke Glasplatte nur dadurch befestigt, daß man sie vorsichtig auf das Glas legt, das keine Spur von Doppelbrechung zeigt. Die Glimmerplatte (*D*) und die Metallschicht, an die Blende (*E*) befestigt, werden bei 45° Azimut eingeführt. Das Fernrohr (*H*) wird so eingestellt, daß man die dünne Glimmerplatte (*D*) deutlich sieht. Indem man die Glimmerplatte (*F*) in ihrer eigenen Ebene dreht und den Drehungswinkel abliest, kann die Phasendifferenz in der Metallschicht bestimmt werden. Diese letztere Glimmerplatte ist sehr schwer zu erhalten. Sie muß ganz gleich dick und ein paar Quadratzentimeter groß sein und eine Phasendifferenz für blaues Licht von weniger als $1/50$ Wellenlänge verursachen.

Nach wochenlanger Übung gelang es mir, eine Glimmerplatte mit den erwähnten Eigenschaften zu erhalten, und es zeigte sich, daß es, wenn man nur sehr vorsichtig war, und große Geduld hatte, möglich war, Glimmerplatten zu erhalten, die eine Größe von 3—4 qcm und eine Phasendifferenz von $1/100$ Wellenlänge für blaues Licht hatten. Diese Glimmerscheibe wird an eine Glasplatte auf dieselbe Weise, wie vorher erwähnt ist, befestigt. Man muß dabei genau darauf achten, daß keine Luftblasen zwischen das Glas und den Glimmer eindringen, und daß sich der dünne Glimmer nicht doppelt legt. Die Glasplatten müssen so befestigt werden, daß keine Spannungen entstehen, die Doppelbrechung verursachen können. Um zu verhindern, daß Wärmestrahlen von

der Bogenlampe die Gläser erwärmen, setzt man unmittelbar vor die Linse ein gläsernes Gefäß, 6 cm breit und mit einer $\frac{1}{2}$ proz. Kupfersulfatlösung gefüllt, die nach Miethe nur 1 Proz. von der Wärmestrahlung durchläßt.

Da ich der Ansicht bin, daß die von Brace gemachten Approximationen nicht erlaubt sind, habe ich die Rechnungen auf eine ganz andere Weise ausgeführt. Ich habe in den Rechnungen keine Rücksicht darauf genommen, daß die Absorption in verschiedenen Richtungen nicht dieselbe ist, was Granqvist nachgewiesen hat, weil Rumpelt bewiesen hat, daß eine kleine einseitige Absorption nicht auf das Ergebnis einwirkt.

Die Intensität (J), die durch einen Polarisator (P), zwei Glimmerplatten (G und G'), welche die Phasendifferenzen δ und δ' bzw. verursachen, und einen Analysator (A) geht, kann so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} J = & 1 \cdot [\cos^2 \alpha + \cos 2(\varphi' - \alpha) \sin 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ & - \sin 2(\varphi' - \alpha) \cos 2\varphi \sin 2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{\delta'}{2} \\ & - \sin 2(\varphi' - \alpha) \sin 2\varphi \cos^2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta + \delta') \\ & + \sin 2(\varphi' - \alpha) \sin 2\varphi \sin^2(\varphi' - \varphi) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta - \delta')]. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Buchstaben geht aus der Fig. 3 hervor. In diesem Fall ist $\varphi = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$. Also wird

$$\begin{aligned} J = & \cos^2 2\varphi' \sin^2 \frac{\delta}{2} + \sin 2\varphi' \cos^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta + \delta') \\ & - \sin 2\varphi' \sin^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(\delta - \delta'). \end{aligned}$$

Für die eine Hälfte ist $\delta = A$ = die Phasendifferenz in der Metallschicht. Für die andere Hälfte ist $\delta = A + \varepsilon$; ε = die Phasendifferenz in dem Glimmer (D). δ' ist die Phasendifferenz in dem Glimmer (F).

Die Intensität von den beiden Hälften soll dieselbe sein.

$$\begin{aligned} & \cos^2 2\varphi' \sin^2 \frac{A}{2} + \sin 2\varphi' \cos^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(A + \delta) \\ & - \sin 2\varphi' \sin^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(A - \delta') \\ = & \cos^2 2\varphi' \sin^2 \frac{A + \varepsilon}{2} + \sin 2\varphi' \cos^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(A + \varepsilon + \delta) \\ & - \sin 2\varphi' \sin^2(\varphi' - 45^\circ) \sin^2 \frac{1}{2}(A + \varepsilon - \delta'); \end{aligned}$$

Dies kann geschrieben werden,

$$\begin{aligned} & \cos^2 2\varphi' \left[\sin^2 \frac{\vartheta + \varepsilon}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \\ & + \sin 2\varphi' \cos^2(\varphi' - 45^\circ) \left[\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta + \varepsilon + \delta') - \sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta + \delta') \right] \\ & - \sin 2\varphi' \sin^2(\varphi' - 45^\circ) \left[\sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta + \varepsilon - \delta') - \sin^2 \frac{1}{2}(\vartheta - \delta') \right] = 0 \end{aligned}$$

oder $\cos^2 2\varphi' \sin \frac{2\vartheta + \varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} & + \sin 2\varphi' \cos^2(\varphi' - 45^\circ) \sin \frac{2\vartheta + 2\delta' + \varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} \\ & - \sin 2\varphi' \sin^2(\varphi' - 45^\circ) \sin \frac{2\vartheta + \varepsilon - 2\delta'}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} = 0. \end{aligned}$$

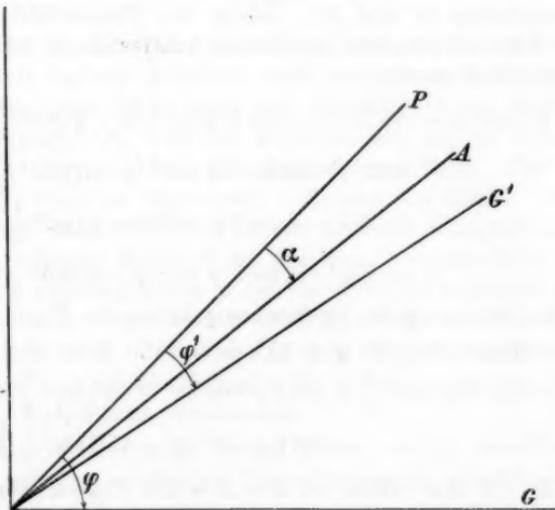


Fig. 3.

Kürze mit $\sin \frac{\varepsilon}{2}$ ab; ϑ und ε sind sehr klein. $\vartheta_{\max} = 0,2^\circ$ und $\varepsilon_{\max} = 3^\circ$.

$$\cos^2 2\varphi' \cdot \left(\vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$+ \sin 2\varphi' \cdot \frac{1}{2} (\sin 2\varphi' + 1) \sin \frac{2\vartheta + 2\delta' + \varepsilon}{2}$$

$$+ \sin 2\varphi' \cdot \frac{1}{2} (1 - \sin 2\varphi') \sin \frac{2\delta' - 2\vartheta - \varepsilon}{2} = 0;$$

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 2 \varphi' \cdot \left(\Delta + \frac{s}{2} \right) \\ + \sin^2 2 \varphi' \cos \delta' \left(\Delta + \frac{s}{2} \right) + \sin 2 \varphi' \sin \delta' = 0; \end{array} \right.$$

wenn $\delta' = \frac{\pi}{2}$ ist, wird

$$\cos^2 2 \varphi' \left(\Delta + \frac{s}{2} \right) + \sin 2 \varphi' = 0.$$

Für $\Delta = 0$ erhält man $\frac{s}{2} + \frac{\sin 2 \varphi'_0}{\cos^2 2 \varphi'} = 0$;

$$(II) \quad \varphi'_0 \text{ ist sehr klein, also } \frac{s}{2} + 2 \varphi'_0 = 0;$$

$$(III) \quad \Delta + \frac{s}{2} + 2 \varphi' = 0.$$

Durch Subtraktion von (II) und (III) erhält man

$$\Delta = 2(\varphi'_0 - \varphi').$$

Wenn δ' nicht zu groß ist, $\cos \delta' = 1 - \frac{\delta'^2}{2} + \dots$

Aus (I) erhält man

$$\left(\Delta + \frac{s}{2} \right) [\cos^2 2 \varphi' + \sin^2 2 \varphi'] - \frac{\delta'^2}{2} \left(\Delta + \frac{s}{2} \right) \sin^2 2 \varphi' + \sin 2 \varphi' \sin \delta' = 0.$$

Das zweite Glied ist klein von höherer Ordnung

$$(IV) \quad \Delta + \frac{s}{2} + \sin 2 \varphi' \sin \delta' = 0.$$

Wenn es keine Metallschicht gibt, ist $\Delta = 0$ und $\varphi' = \varphi'_0$

$$(V) \quad \frac{s}{2} + \sin 2 \varphi'_0 \sin \delta' = 0.$$

Durch Subtraktion von (IV) und (V) erhält man

$$\Delta = \sin(2\varphi'_0 - \sin 2 \varphi') \sin \delta',$$

$$\Delta = 2 \cos(\varphi'_0 + \varphi') \sin(\varphi'_0 - \varphi') \sin \delta';$$

$$\varphi' - \varphi'_0 = \Theta; \text{ also } \varphi'_0 + \varphi' = 2\varphi'_0 + \Theta,$$

$$(VI) \quad \Delta = -2 \cos(2\varphi'_0 + \Theta) \sin \Theta \sin \delta'.$$

Wir halten Θ für positiv, wann $\varphi' > \varphi'_0$, ist $\varphi' < \varphi'_0$, so erhält man

$$(VIa) \quad \Delta = 2 \cos(2\varphi'_0 - \Theta) \sin \Theta \sin \delta'.$$

Brace hat $\cos(2\varphi'_0 + \Theta) = 1$. Wenn wir die Werte, die Elmén¹⁾ angewandt hat, um die Kerrischen Konstanten zu

1) G. W. Elmén, Ann. d. Phys. 16. p. 350. 1905.

bestimmen, in die Formel einsetzen, finden wir, daß die Formel von Brace ein Resultat liefert, das einen mehrprozentigen Fehler hat. Er gibt $\varphi_0' = 11^\circ 42'$ an, d. h. er hat $\cos 23^\circ 24' = 1$, eine Approximation, die nicht erlaubt ist.

Um durch Experimente die Richtigkeit der abgebildeten Formel zu beweisen, wurde folgender Versuch gemacht: Die Nullstellung = $13,1^\circ$, $2\varphi_0' = 14^\circ 24'$. Eine Metallschicht wurde eingeführt. Damit das ganze Gesichtsfeld gleichmäßig beleuchtet werde, mußte man „den Kompensator“ bis $20,2^\circ$ drehen. Also wird $\Theta = 20,2^\circ - 13,1^\circ = 7,1^\circ$.

Die Metallschicht wurde um 90° gedreht. Bei derselben Intensität in beiden Hälften wies „der Kompensator“ auf $6,4^\circ$; $|\Theta| = 13,1^\circ - 6,4^\circ = 6,7^\circ$. Die beiden Winkel stimmen also nicht miteinander überein. Nach (VI) oder (VIa) erhalten wir

$$\cos(14,4 + 7,1^\circ) \sin 7,1^\circ = 6,607,$$

$$\cos(14,4 - 6,7^\circ) \sin 6,7^\circ = 6,609.$$

Dieses Resultat stimmt völlig mit den gemachten Berechnungen überein.

Aus den abgeleiteten Formeln (VI) und (VIa) geht auch hervor, daß das Zeichen für Δ von dem Zeichen für Θ abhängt. Durch eine einzige Ablesung erhält man also nicht nur die Größe der Phasendifferenz, sondern auch ihr Zeichen. Dies ist von großer Bedeutung, denn, wie ich später nachweisen werde, hängt das Zeichen der Phasendifferenz von dem Abstand von der Kathode ab.

Die Methode, welche Brace zur Gradierung des Instruments empfiehlt, konnte nicht angewandt werden, weil der Kompensator dann nicht mit genügender Genauigkeit bestimmt worden wäre. Der Fehler dieser Methode, wenigstens mit den Hilfsmitteln, die mir zu Gebote standen, wurde größer als 30 Proz. Darum bin ich auf folgende Weise zuwege gegangen.

Zuerst wurde die Phasendifferenz in einer dicken Glimmerplatte mit Hilfe des Kompensators Babinets auf die gewöhnliche Weise bestimmt. Diese Glimmerplatte war so gewählt, daß sie eine Phasendifferenz von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge für Strahlen mit einer Wellenlänge von etwa $0,50 \mu$ verursachte. Wenn man sehr genau sein will, soll man sich eine Viertelwellenglimmerplatte für jede Farbe, mit der man gradieren

will, verschaffen. Die Phasendifferenzen für verschiedene Farben waren:

$$\begin{array}{ll} \text{für Rot} = 0,21 \text{ Wellenlängen} \\ \text{„ Gelb} = 0,23 & „ \\ \text{„ Grün} = 0,25 & „ \\ \text{„ Blau} = 0,29 & „ \end{array}$$

Die betreffende Farbe erhielt man durch Farbenfilter von Glas für Rot, Grün und Blau, aber für Gelb wurde eine Lösung von Nickelsulfat, Kaliumbromat und Erythrosin angewandt.

$$\begin{array}{ll} \text{Das rote Glas ließ} & 605-675 \mu\mu \text{ durch} \\ \text{Die gelbe Lösung ließ} & 560-600 \mu\mu „ \\ \text{Das grüne Glas ließ} & 520-565 \mu\mu „ \\ \text{Das blaue Glas ließ} & 420-490 \mu\mu „ \end{array}$$

In der Versuchsanordnung von Brace wird die Glimmerplatte (D) gegen (F) ausgetauscht, und die letztere wird durch die Viertelwellenglimmerplatte ersetzt. Der Analysator, dessen Drehung man ablesen muß, wird an einen Teilkreis befestigt, der in das Instrument eingepaßt wird. Die Berechnungen geschahen nach der vorher erwähnten Formel:

$$\sin \varepsilon = \sin 2 \alpha \sin \delta.$$

Durch logarithmisches Differenzieren erhält man:

$$\frac{ds}{\tg \varepsilon} = \frac{2 d \alpha}{\tg \alpha} + \frac{d \delta}{\tg \delta}.$$

Da $\tg \delta$ sehr groß ist, sieht man, daß eine kleine Fehlerbestimmung ($d \delta$) mit dem Kompensator Babinets nicht auf den Fehler in ε einwirkt. Man kann scharfe Einstellungen machen.

In dem benutzten „Kompensator“ war die Phasendifferenz

$$\begin{array}{ll} \text{für Rot} = \frac{1}{73,0} \text{ Wellenlängen} \\ \text{„ Gelb} = \frac{1}{71,0} & „ \\ \text{„ Grün} = \frac{1}{60,0} & „ \\ \text{„ Blau} = \frac{1}{51,8} & „ \end{array}$$

Das Glas, auf dem die Metallspiegel gebildet wurden, bestand, wie schon erwähnt ist, aus 0,1 mm dicken Platten. Zu-

erst muß man untersuchen, daß diese nicht allzusehr doppelbrechend sind. Von 30, die untersucht wurden, zeigte es sich, daß nicht mehr als 15 anwendbar waren.

Um die Phasendifferenz in verschiedenen Distanzen von der Kathode zu messen, wurde die Schicht selbst mit einer Teilmaschine gradiert. Mit Hilfe einer Spalte, die 2 mm breit und 15 mm lang war, wurde ein gewisser Teil der Metallschicht, die bei 45° Azimut zwischen den beiden dünnen Glimmerblättchen eingeführt wurde, abgegrenzt.

Experimentelle Resultate.

Das Präparat Granqvists aus dem Jahre 1897 wurde untersucht. Es zeigte sich, daß ein großer Teil dieser Metallschichten stark doppelbrechend war. Die Behauptung Kaempfs, daß die Doppelbrechung mit der Zeit verschwindet, ist also nicht richtig.

Die Lage der Doppelbrechung hängt von der Form und der Stellung der Kathode im Verhältnis zu der Glasscheibe ab. Ist die Kathode ein Draht, der senkrecht zu dem Glas steht, erhält man eine kreisförmige Metallschicht, wo die Achsen tangentiell und radiell liegen. Wenn die Kathode die Form eines Bleches hat, das senkrecht zur Fläche der Glasscheibe und symmetrisch über derselben hängt, liegen die Achsen der Doppelbrechung parallel und rechtwinkelig zur Längenrichtung des Glases. Wenn dagegen das Kathodenblech in seiner eigenen Ebene so gerückt wird, daß die Mitte des Bleches außerhalb der Glasscheibe kommt, erhalten die Achsen eine schräge Lage, d. h. die Lage der Achsen hängt von der Einfallssrichtung der Partikeln ab. Wird eine Glasscheibe so befestigt, daß ihre Ebene der Fläche des Kathodenblechs parallel läuft, wird die Schicht nicht doppelbrechend. — Um die Dicke solcher Metallschichten zu bestimmen, gibt es keine allgemeine Methode. Die Dicke der Silberschichten kann man recht genau bestimmen, indem man die Schicht in Silberjodid verwandelt und die durch Reflexion entstandenen Interferenzfarben beobachtet.

Die in den Tabellen angegebenen Werte sind Durchschnittszahlen von drei Ablesungen. Keine Ablesung wich von

den anderen mehr als $0,1^\circ$ ab. Der kleinste Wert der Phasendifferenz, der gemessen worden ist, ist $5 \cdot 10^{-6} \lambda$. Die Beobachtungen, die gemacht worden sind, gehen aus den folgenden Tabellen hervor:

Tabelle I.

(Silber, in trockener Luft dargestellt, Druck = 0,1 mm.)

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
θ_{rot}	0	-0,2	0,3	0,6	1,8	3,1	3,8	3,5	3,1	2,8	2,2	1,7
θ_{gelb}	-0,1	-0,4	0	0,6	2,6	4,4	5,0	5,2	4,7	4,0	3,6	2,6
θ_{blau}	-0,7	-1,4	-0,3	2,0	3,8	6,1	7,1	7,6	7,3	6,7	6,0	5,9
$10^4 \Delta_{\text{rot}}$	0	-1,0	-1,4	2,8	8,2	13,4	17,6	16,0	13,4	12,9	10,0	7,7
$10^4 \Delta_{\text{gelb}}$	-0,5	-2,0	0	3,1	12,8	21,3	24,3	25,3	22,8	19,6	17,7	12,8
$10^4 \Delta_{\text{blau}}$	-4,7	-9,1	-2,2	18,0	24,9	38,7	44,6	47,4	45,7	42,8	38,0	37,3
Dicke in $\mu\mu$	27	36	41	41	40	40	31	30	27	23	23	15

Alle folgenden Schichten sind in trockenem Wasserstoff dargestellt, und ich habe nur die Werte von Δ mitgenommen.

Tabelle II.

(Silber, Druck 0,5 mm.)

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 \Delta_{\text{rot}}$	-0,6	-3,7	9,6	29,0	36,3	37,3	36,0	29,6	23,4	18,1	12,2	7,4
$10^4 \Delta_{\text{grün}}$	-9,8	-3,3	10,4	29,2	39,7	41,6	42,1	37,6	31,4	26,5	20,7	16,1
$10^4 \Delta_{\text{blau}}$	-6,6	-2,7	1,4	8,4	18,7	17,0	17,6	17,0	16,3	15,7	13,7	11,8
Dicke in $\mu\mu$	10	—	18	14	—	12	—	—	8	—	—	—

Tabelle III.

(Platin, Druck 0,1 mm.)

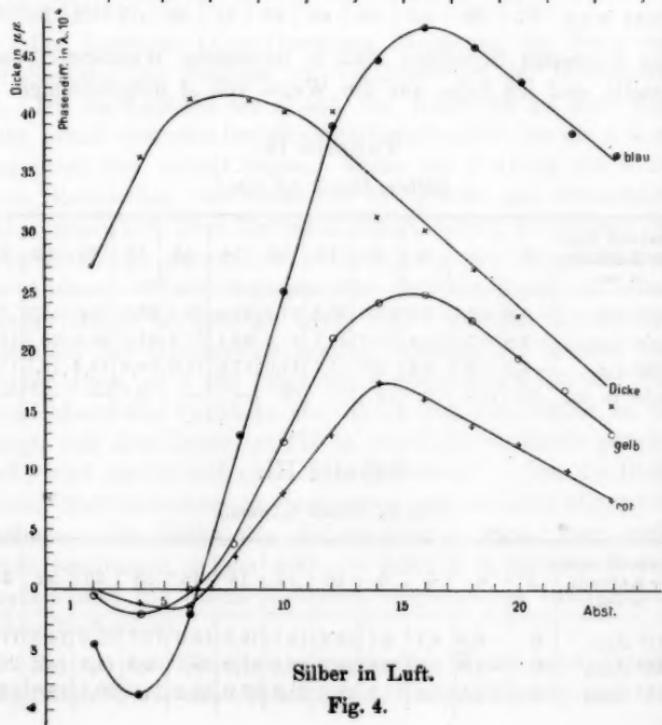
Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 \Delta_{\text{rot}}$	0	-0,9	4,1	8,7	18,7	18,5	19,5	19,0	17,7	15,0	14,0	11,4
$10^4 \Delta_{\text{gelb}}$	0	-1,0	5,0	9,8	14,2	19,2	21,0	19,2	18,9	14,8	14,2	12,3
$10^4 \Delta_{\text{blau}}$	0	-1,6	5,9	11,8	18,2	24,8	27,0	25,2	24,0	20,1	18,8	16,3

Tabelle IV.
(Palladium, (Druck 0,3 mm.)

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 A_{\text{rot}}$	- 9,6	- 8,5	- 0,5	3,7	6,9	8,7	9,6	8,3	7,4	6,4	6,0	5,5
$10^4 A_{\text{grün}}$	- 10,5	- 8,8	0	6,0	9,8	12,5	18,5	13,0	10,8	9,3	8,7	7,1
$10^4 A_{\text{blau}}$	- 13,3	- 9,3	0	7,9	13,1	17,0	18,2	16,3	14,5	11,8	11,2	9,2

Tabelle V.
(Wismut, Druck 0,5 mm.).

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 A_{\text{rot}}$	- 0,9	16,0	28,0	19,0	13,7	11,0	9,6	6,5	4,6	-	-	-
$10^4 A_{\text{grün}}$	- 1,0	16,2	30,0	20,6	14,8	11,3	9,9	7,0	5,0	-	-	-
$10^4 A_{\text{blau}}$	- 0,6	20,7	32,4	26,5	20,0	13,7	13,1	9,9	7,8	-	-	-

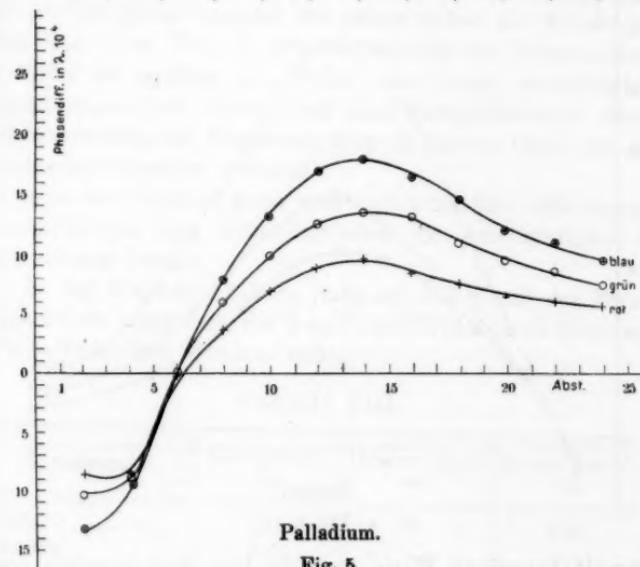


Silber in Luft.

Fig. 4.

Tabelle VI.
(Kupfer, Druck 0,5 mm.)

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 \Delta_{\text{rot}}$	-2,3	7,4	15,5	23,0	33,0	34,4	31,9	24,3	18,1	12,7	7,8	6,9
$10^4 \Delta_{\text{gelb}}$	-1,0	6,4	11,8	15,3	17,7	21,4	19,0	16,2	11,8	8,4	6,4	5,0
$10^4 \Delta_{\text{blau}}$	-0,6	5,9	10,5	15,0	16,2	16,7	15,5	11,8	7,9	6,6	4,6	4,0



Palladium.
Fig. 5.

Tabelle VII.

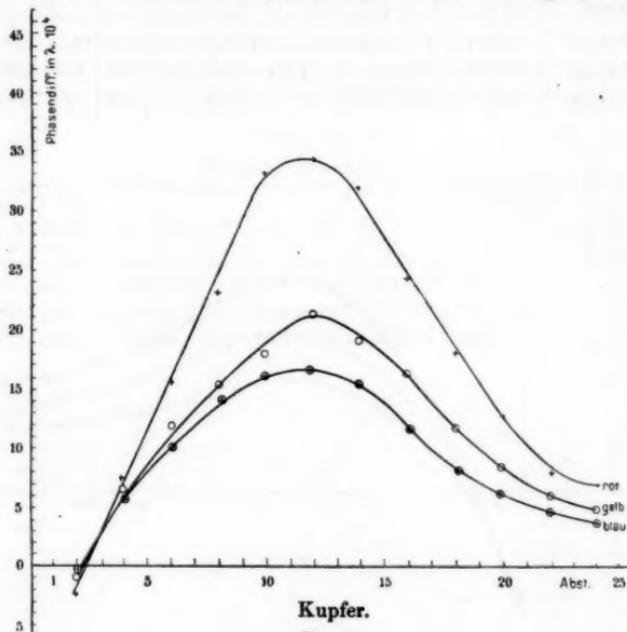
(Gold, Druck 0,8 mm.)

Abstand von der Kathode in mm	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$10^4 \Delta_{\text{rot}}$	-1,3	-2,7	8,7	11,4	19,0	23,9	29,6	28,7	28,0	26,0	21,7	20,8
$10^4 \Delta_{\text{gelb}}$	0	-1,5	2,6	6,0	11,8	17,8	22,0	23,8	22,4	21,5	20,8	17,2
$10^4 \Delta_{\text{blau}}$	0	0,7	2,0	4,6	8,5	10,5	11,7	11,2	10,5	9,9	9,2	8,5

Um diese Tabellen graphisch zu veranschaulichen, sind einige Kurven gezogen.

Durch diese Tabellen und Kurven sieht man sogleich, daß

der von Rumpelt aufgestellte Satz, daß die Doppelbrechung aller Metalle für lange Wellenlängen am größten ist, unrichtig ist. Dieses Verhältnis trifft nur in Kupfer- und Goldschichten ein. Vorhin habe ich nachgewiesen, daß die Messungen, welche



Kupfer.

Fig. 6.

Rumpelt betreffend Platin gemacht hat, sehr unsicher sind. Vergleichen wir die Werte Rumpelts für Platin mit denen, die durch diesen Versuch erhalten worden sind, sehen wir, daß die Werte völlig umgestellt sind. Ich habe mehrere Platin-schichten dargestellt, und die Art der Doppelbrechung ist stets dieselbe gewesen.

Der theoretische Versuch Rumpelts, die von O. Wiener entwickelten Formeln für lamellare Doppelbrechung anzuwenden, führt zu folgendes Resultat. „Die Phasendifferenz bei der Doppelbrechung hängt *nicht* von dem Brechungsexponenten ab.“ Mein Resultat kann so zusammengefaßt werden. Die Phasendifferenz bei der Doppelbrechung hängt *in hohem Grade* von dem Brechungsexponenten ab.

Nach Untersuchungen von **Kundt**¹⁾, **Betz**²⁾ und anderen haben Kupfer und Gold normale Dispersion. Bei diesen beiden Metallen ist die Phasendifferenz für Rot am größten und für Blau am kleinsten (vgl. Tabb. VI und VII).

In trockner Luft kathodenerstäubtes Silber, und in Wasserstoff dargestellten Platin und Wismut haben anomale Dispersion. Bei diesen Metallen ist die Phasendifferenz für Blau am größten und für Rot am kleinsten. Betz hat außerdem nachgewiesen, daß der Brechungsexponent für reines Silber ein Minimum in Grün hat. Aus Tab. II geht hervor, daß die Phasendifferenz für Grün am größten ist. Schon aus diesen oberflächlichen Betrachtungen geht hervor, daß die Phasendifferenz in dünnen kathodenerstäubten Metallschichten in hohem Grad von dem Brechungsexponenten abhängt.

Aus den Tabellen kann man auch schließen, daß zwischen Phasendifferenz und Brechungsindex ein sehr einfacher Zusammenhang besteht.

In der folgenden Tabelle habe ich die Werte der Berechnungsindizes angegeben, die Kundt und Betz durch Messungen in Metallschichten erhalten haben.

Tabelle VIII.

Substanz	Roter Strahl n_R	Grüner Strahl n_G	Blauer Strahl n_B
Gold	0,88	—	1,00
Kupfer	0,45	—	0,95
Platin	1,76	—	1,44
Wismut	2,61	—	2,13
Silber	0,24	0,14	0,30
Oxid. Silber . . .	1,50	0,85	0,68

Ehe ich den erwähnten Zusammenhang nachweise, will ich betonen, daß man dies, ehe weitere Versuche gemacht worden sind, für eine mehr oder weniger approximative Relation halten muß. Es ist eine allgemein bekannte Sache, daß solche Metallschichten sehr schwer zu definieren sind. Die optischen Konstanten können für verschiedene Schichten des-

1) A. Kundt, Ann. d. Phys. 34. p. 482. 1888.

2) W. Betz, Ann. d. Phys. 18. p. 590. 1905.

selben Metalls recht bedeutend variieren. Da man die Dicke der Schichten nicht bestimmen kann, ist es schwer zu überblicken, wie die wiederholte Reflexion der Strahlen die Resultate verrückt. Diese Fehlerquelle spielt die kleinste Rolle, wenn die Dicke groß ist. Weiter habe ich nicht Rücksicht auf diejenigen Phasendifferenzen genommen, die entstehen, wenn das Licht die Grenzen zwischen dem kristallinischen absorbierenden Körper und den isotropen Medien, die diesen begrenzen, passiert. Ich habe nur auf diejenigen Werte Rücksicht genommen, die an das Maximum der Doppelbrechung grenzen.

Für Gold ist nach Tab. VIII $\frac{n_B}{n_R} = \frac{100}{38} = 2,6$.

Aus Tab. VII erhält man $\frac{\Delta_{\text{rot}}}{\Delta_{\text{blau}}} = \frac{29,6}{11,7} = 2,5$.

Für Kupfer ist nach Tab. VIII $\frac{n_B}{n_R} = \frac{95}{45} = 2,1$.

Aus Tab. VI erhält man $\frac{\Delta_{\text{rot}}}{\Delta_{\text{blau}}} = \frac{34,4}{18,7} = 2,1$.

Für Platin ist nach Tab. VIII $\frac{n_B}{n_R} = \frac{1,40}{1,76} = 0,79$.

Aus Tab. III erhält man $\frac{\Delta_{\text{rot}}}{\Delta_{\text{blau}}} = \frac{18,5}{24,8} = 0,74$.

Für Wismut ist nach Tab. VIII $\frac{n_B}{n_R} = \frac{213}{261} = 0,82$.

Aus Tab. V erhält man $\frac{\Delta_{\text{rot}}}{\Delta_{\text{blau}}} = \frac{28,0}{32,4} = 0,86$.

Für Silber ist nach Tab. VIII $\frac{n_B}{n_G} = \frac{30}{14} = 2,2$.

Aus Tab. II erhält man $\frac{\Delta_{\text{grün}}}{\Delta_{\text{blau}}} = \frac{42,1}{17,6} = 2,4$.

Aus dem, was oben erwähnt ist, geht, wie mir scheint, folgendes hervor: *Das Verhältnis zwischen den Phasendifferenzen für zwei Farben an ein und derselben Stelle in der Schicht ist gleich dem invertierten Verhältnis zwischen den Brechungsexponenten dieser beiden Farben.*

Indem man die Phasendifferenz mißt, kann man also sagen, wie die Dispersionskurve in einer willkürlichen Einheit verläuft.

Die Dispersionskurve für Palladium habe ich nicht in der Literatur gefunden. Indem man den erwähnten Zusammenhang ausnützt, können wir schließen, daß Palladium anomale Dispersion zeigt und daß $n_R/n_B = 1,9$ (appr.).

Mit Hilfe der Tabellen und Kurven können wir noch ein paar Eigentümlichkeiten bei diesen Metallschichten ablesen.

Betreffend die Silberschichte ist angegeben, wie die Dicke mit dem Abstand von der Kathode variiert. Man sieht, daß sich die Doppelbrechung nicht so sehr nach der Dicke richtet, denn, wo diese am größten ist, ist die Doppelbrechung sehr klein, d. h. die Doppelbrechung ist nicht für das Metall als solches kennzeichnend, sondern muß ihren Grund darin haben, daß die verschiedenen Teile der Schicht auf eine gewisse Weise, die für verschiedene Distanzen von der Kathode nicht dieselbe ist, geordnet worden sind.

Für ein und denselben Metallspiegel ändert sich das Zeichen der Doppelbrechung. Wenn wir sie weiter weg von der Kathode positiv nennen, ist sie der Kathode am nächsten negativ. In unmittelbarer Nähe der Kathode ist die Doppelbrechung sehr klein, dann nimmt sie numerisch zu, um in einem gewissen Abstande Null zu werden.

Theoretische Betrachtung.

Mit der Hypothese von Kaempf und Rumpelt können die Eigenschaften der Schichten nicht erklärt werden. Die Hypothese von Kundt und Granqvist, daß die Doppelbrechung darauf beruht, daß sich die Teile auf eine gewisse Weise geordnet haben, ist sehr wahrscheinlich. Diese Forscher dachten beide, daß die ordnende Kraft auf elektrischen Kräften beruhte. Übrigens sind die Äußerungen beider in dieser Hinsicht sehr ungewiß.

Ich bin der Ansicht, daß die kristallinischen Eigenschaften der Schichten durch die Annahme erklärt werden können, daß sie aus geordneten Ellipsoiden aufgebaut sind. Daß von gebildeten Ellipsoiden gebildete Medien doppelbrechend sind, haben A. Schumann¹⁾ und A. Cotton²⁾ und H. Mouton³⁾ experimentell und Lampa,⁴⁾ Langevin⁴⁾ und Voigt⁵⁾ theoretisch bewiesen. Man kann sich denken, daß diese Ellipsoide

1) A. Schumann, Ann. d. Phys. 10. p. 658. 1903.

2) A. Cotton u. H. Mouton, Compt. rend. p. 154, 990. 1912.

3) A. Lampa, Wiener Berichte Math.-Phys. Kl. 2. p. 681. 1895.

4) P. Langevin, Le Radium 7. p. 249. 1910.

5) W. Voigt, Göttinger Nachr. Math.-Phys. Kl. Heft 5. p. 577. 1912.

dadurch entstanden sind, daß die verschiedenen Teile deformiert worden sind, wenn sie die Glasplatte getroffen haben. Daraus ersieht man, daß die Doppelbrechung eine Funktion von dem Abstande von der Kathode sein muß, denn je schräger die Teile einfallen, desto ausgeprägtere Ellipsoide müssen sie werden. Außerdem muß die Doppelbrechung von der Geschwindigkeit der Partikel abhängen, wenn sie die Platte treffen, und es ist eine bekannte Sache, daß die Doppelbrechung kleiner wird, wenn der Druck zunimmt. Es ist auch deutlich, daß die Achsen der Doppelbrechung von der Einfallsrichtung der Partikel abhängen müssen, was ich auch vorher experimentell bewiesen habe.

Man kann sich denken, daß diese kristallinische Struktur auch auf andere Weise entstanden ist. Wenn die von der Kathode geworfenen Teilchen länger in einer Richtung als in einer anderen sind, kann jedes Teilchen durch das elektrostatische Feld influenziert werden und sich in die Richtung der Kraftlinien stellen. Aber durch diese letztere Annahme allein scheint es mir schwer zu erklären, daß die Doppelbrechung Zeichen in einem gewissen Abstande von der Kathode wechselt. Es ist jedoch möglich, daß beide Faktoren gemeinsam die kristallinische Struktur weiterhin von der Kathode verursachen.

Die Teile, die senkrecht zur Fläche des Kathodenbleches ausgehen und das Glas in der Nähe der Kathode treffen, werden sehr wenig deformiert. Aber nicht alle Teile gehen senkrecht zur Ebene des Bleches aus. Dies habe ich experimentell auf die folgende Weise bewiesen. Die eine Hälfte des Kathodenbleches, die aus Silber bestand, wurde mit einem Aluminiumblättchen gedeckt. Aluminium wird nicht zerteilt, aber gerade vor dem Al-Blättchen waren recht große Mengen Silber niedergeschlagen. Man versteht nun leicht, daß die Doppelbrechung in der Nähe der Kathode verhältnismäßig klein sein und ein anderes Zeichen als weiter weg haben muß.

Vergleicht man die Kurven für Palladium und Kupfer, so sieht man, daß die „negative“ Doppelbrechung bei Palladium vielmals größer als die für Kupfer ist. Dies beruht darauf, daß das Palladiumblech mehr als noch einmal so breit ist als das Kupferblech. Die Partikel des ersteren können

also schräger als die, welche von dem Kupferblech kommen, einfallen.

Für diese Annahme spricht auch, daß das Zeichen der Doppelbrechung für alle Metalle dasselbe ist, daß die Absorption in verschiedenen Richtungen verschieden ist, und daß es, wie Granqvist nachgewiesen hat, um doppelbrechende Schichten zu erhalten notwendig ist, daß die Verdünnung verhältnismäßig weit fortgeschritten sei und daß sich die Platte in der Nähe der Kathode befindet. Bei der Fortsetzung des Versuches werden alle die Faktoren, die, wie man glaubt, nach dieser Annahme auf die Doppelbrechung einwirken können, genau untersucht werden.

Nachtrag.

Die Metallschichten, die sich auf dem Glas unter der Kathode bilden, sind nicht gleich dick. Durchschnittlich hat die Schicht das Aussehen, daß die Fig. 7 zeigt.



Fig. 7.

Unter der Kathode entsteht ein nackter Fleck, der dieselbe Form wie die Projektion der Kathode auf das Glas hat. Die Erklärung der Entstehung dieser Grube fällt nicht in das Gebiet dieser Untersuchung, aber da die Hypothesen, die es darüber gibt, nicht genügend sind, will ich zeigen, wie man aus der Grundannahme Starks für die Kathodenerstüubung die Entstehung dieses Flecks einfach erklären kann. Die Theorie von Stark kann in folgende Worte zusammengefaßt werden. Gegen die Kathode stürzen positiv geladene Atome mit großer kinetischer Energie, die diese Teile beim Passieren der großen Spannungsdifferenzen in der Nähe der Kathode erhalten haben. Ein Atomstrahl, der auf einen Teil an der

Oberfläche eines Körpers trifft, kann an diesen einen Teil seiner Bewegungsenergie abgeben und ihm unter Umständen eine Geschwindigkeitskomponente in seiner eigenen ursprünglichen Richtung erteilen. Aber die Teile, die gegen die Kathode kommen, können auch an oder unmittelbar innerhalb der Fläche reflektiert werden.

Die Kanalstrahlen erhalten ihre hauptsächliche Energie in der Nähe der Kathode. Sie müssen sich darum unmittelbar an der Kathode in der Richtung bewegen, in welcher die Kraft am größten ist. Nimmt man einen Teil des freien Weges weg, auf welchem die Kanalstrahlen ihre Bewegungsenergie erhalten, muß ihr zerteilendes Vermögen kleiner werden, und, wenn ihre Bewegungsenergie einen gewissen Wert nicht erreicht, hört alle Zerstäubung auf. Wird eine Glasplatte einige Millimeter weit von einer ebenen Kathode so gestellt, daß beide Flächen parallel sind, so wird auf dem Glas keine Metallschicht nach den Untersuchungen von Maurain¹⁾ gebildet. Die Erklärung ist ganz einfach, daß hinter dem Glas keine Kanalstrahlen mit hinreichender Energie die Metallscheibe treffen. Maurain machte außerdem folgenden Versuch. In einem Abstand von 5 bis 6 mm von dem Kathodenblech wird eine Platte mit einem runden Loch aufgestellt. Metallbeschläge werden nur an den Kanten um das Loch gebildet. Die Kanalstrahlen, die durch das Loch hindurchgehen, haben große Bewegungsenergie und verursachen Zerstäubung. Die losgerissenen Teile folgen dann, wie Granqvist nachgewiesen hat, den Kraftlinien bis zu dem Teil der Wand, der am nächsten ist.

Die Grube unter der Kante des Kathodenbleches beruht teilweise darauf, daß das Glas die Kanalstrahlen hindert, die nötige Energie zu erhalten, bis sie die Kante treffen. Aber diese Erklärung allein ist nicht genügend, denn Metallbeschläge könnten sehr wohl unter der Kante gebildet werden, obgleich das Metall nicht von Teilen der Kante herrührte. Man weiß, daß Kanalstrahlen, die durch ein Loch in der Kathode hindurchgegangen sind, Zerstäubung verursachen, obgleich sie infolge von Attraktion von der Kathode gebremst werden.

1) Ch. Maurain, Compt. rend. 141. p. 1228. 1905.

Aber die Kanalstrahlen, die von der Kathode reflektiert werden, erhalten dieselbe Ladung wie die Kathode und haben dadurch ein größeres Zerstäubungsvermögen als die vorher erwähnten.

Mit Hilfe dieser reflektierten Kanalstrahlen kann man auch einen Versuch, den Granqvist gemacht hat, erklären. Er schreibt: „Unter eine drahtförmige Kathode wurde eine Glasplatte gestellt, mit einer dünnen Lage aus Silber gedeckt. Es zeigte sich nun, daß unter der Kathode ein Loch in der Silberschicht entstand. — Aus dem, was gesagt ist, kann man auch folgendes schließen. Will man auf einer Glasscheibe eine gleich dicke, gleichförmige Metallschicht darstellen, muß diese Glasscheibe so weit von der Ebene des Kathodenbleches und parallel zu derselben liegen, daß die positiven Atome die nötige Bewegungsenergie erhalten, mit anderen Worten, es ist notwendig, daß die Glasscheibe außerhalb des Crookesschen dunklen Raumes liege.

Ich glaube auch, daß man auf diese Weise teilweise erklären kann, daß die Zerstäubung von der Form des Entladungsrohres und der Lage des Kathodenbleches in denselben abhängt.

Upsala, Physikalisches Institut, Oktober 1918.

(Eingegangen 18. Oktober 1918.)

**2. Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum;
von J. E. Lilienfeld.**

(Fortsetzung der Untersuchungen aus dem Bd. 32 der vierten Folge
[1910], p. 675—728).¹⁾

I. Einleitung.

Eines der Ergebnisse der in der Überschrift genannten früheren Veröffentlichung ist, daß in hinreichender Entfernung von den Elektroden im höchsten herstellbaren Vakuum ein Entladungsgebilde mit einer linearen Potentialverteilung längs der Entladungssachse besteht. Ferner, daß dieses der positiven Lichtsäule bei höherer Gasdichte in bezug auf das Wesen des Elektrizitätsleitungsvorgangs analoge Gebilde sich dadurch auszeichnet, daß das Potentialgefälle längs seiner Entladungsbahn bei abnehmender Gasdichte zunimmt; vorausgesetzt, daß der Gasdichte eine unterhalb eines gewissen Grenzwertes²⁾ liegende Größe zukommt. Schließlich, daß diese Zunahme des Potentialgefälles nicht unbegrenzt erfolgt, sondern einem Grenzwerte zustrebt.

Die — zur Vornahme der mit diesen Ergebnissen verknüpften Versuche — erforderliche Änderung der Gasdichte

1) Diese Arbeit soll im folgenden kurz mit Ann. 1 bezeichnet werden.

2) Ich möchte auch an dieser Stelle es nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß es für das Auftreten der hier behandelten Erscheinungen wesentlich ist, daß das Verhältnis der räumlichen Dichte der negativen Elektronen zu denjenigen der Gasmoleküle einen gewissen Grenzwert überschreitet [Ann. 1, p. 674]. Man kann demnach die Erscheinungen bei desto größerer Gasdichte erhalten, je größere Stromdichten erzeugt werden können. Die experimentelle Grenze der Steigerung der Stromdichte ist aber dadurch gegeben, daß alle Materialien bei übermäßiger Erhitzung Gas abgeben bzw. verdampfen. Deshalb ist man praktisch auf die Herstellung hohen Vakuums angewiesen, wenn eindeutige und saubere Versuchsbedingungen innerhalb eines tunlichst ausgedehnten Bereiches angestrebt werden.

sowie die Herstellung des Hochvakuums überhaupt wurde — (unter Mitbenutzung der üblichen Quecksilberpumpen) — der Hauptsache nach mit Hilfe tiefer Temperaturen bewerkstelligt. Und zwar einerseits durch Adsorption der Holzkohle bei Temperaturen, die bis zur Gefriertemperatur des Stickstoffs reichten. Andererseits wurde aber die Temperatur der Außenwände des Entladungsrohres von der Temperatur der Erweichung des Glases bis zu derjenigen der flüssigen Luft geändert.

Die Entladungscharakteristik in dem untersuchten Teile der Entladung im Hochvakuum zeichnet sich durch Unabhängigkeit vom Röhrenquerschnitt aus, indem das Potentialgefälle allein von der Stromdichte abhängt, und mit ihrer Zunahme wächst. Auf diese Entladungscharakteristik bezogen läßt sich das Gesagte so fassen, daß sie bei abnehmender Gasdichte einer *Grenzfunktion* zustrebt, und daß die Charakteristik bereits bei derjenigen Gasdichte, welche in dem Entladungsrohre herrscht, falls die Entladung seine Außenwände auf etwa $+350^{\circ}$ erhitzt hat, nur noch um kleine Beiträge von dieser Grenzfunktion abweicht, vorausgesetzt, daß das Rohr mit durch flüssige Luft gekühlter Holzkohle in Verbindung steht.

Die vorliegende Fortsetzung der früheren Untersuchung beschäftigt sich mit der Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen der angeführten Gesetzmäßigkeiten. In der Hauptsache dadurch, daß die Temperatur der adsorbierenden Holzkohle bis zur Gefriertemperatur des Wasserstoffs herabgesetzt wurde. Die dabei gemachten Beobachtungen entsprechen vollkommen dem durch das Gesetz geforderten Verlaufe.

Dann aber auch dadurch, daß zu den bisherigen Versuchen, bei denen das Material und die Temperatur der Anode, sowie die Temperatur der damals benutzten Oxydkathoden nach Wehnelt in weitesten Grenzen variiert wurde, noch ein neuer Versuch hinzutreten ist, indem auch noch die Oxydkathode durch einen glühenden Tantaldraht ersetzt wurde. Auch dieser Versuch führte zur Bestätigung des Gesetzes. Die mit der Oxydkathode erzielten Daten decken sich mit denjenigen, welche sich bei Benutzung einer Tantalelektrode ergeben.

Schließlich wurde mittels des im nachstehenden be-

schriebenen Hochvakuumventiles die Diffusionsgeschwindigkeit der Gasreste aus der Röhre in das Kohlegefäß variiert. Auch diese Versuche brachten dem Gesetze sich unterordnende Resultate.

Einige der Versuche sind bereits in der Form einer vorläufigen Mitteilung in den Berichten der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 63. p. 534—539 (1911), veröffentlicht. An den diesbezüglichen Stellen wird darauf hingewiesen.

II. Die experimentellen Hilfsmittel und die Herstellung des Vakuums.

Die experimentellen Hilfsmittel sind dieselben geblieben wie bei der in der Überschrift erwähnten früheren Arbeit.

Insbesondere ist die Art des Evakuierens unverändert beibehalten worden. Da öfters die Frage aufgeworfen wird, weshalb ich mich nicht der Molekularpumpe¹⁾ bediene, will ich an dieser Stelle bemerken, daß diese Pumpe für meine Arbeitsweise keine Vorteile bietet. Denn meine Messungen haben naturgemäß über lange Zeiten, Wochen und Monate, ausgedehnt werden müssen, um mit Sicherheit zu ergeben, daß keine weitere Änderung der Charakteristik mit fortgesetzter Entgasung der Röhrenwände zu erwarten ist. Deshalb ist es unbedingt erforderlich, *dauernd* die Dämpfe des Öles und des Quecksilbers vom Entladungsrohr fernzuhalten. Das wäre bei der Molekularlampe, ohne daß ein Teil der Leitung mit flüssiger Luft gekühlt wird, nur durch einen fortgesetzten monatelangen Betrieb zu erreichen. Und eine solche Arbeitsweise wäre sicher nicht praktisch.

Wenn man aber die Benutzung der tiefen Temperaturen — übrigens einer zweifellos sehr sauberen und zuverlässigen²⁾ Technik — doch nicht umgehen kann, erübrigt sich die Notwendigkeit, ein neues Hilfsmittel einzuführen. Ganz besonders,

1) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41. p. 337. 1913.

2) Denn die maschinellen Betriebsstörungen unterliegenden Bestandteile sind bei dieser Arbeitsweise erstens von der Vakuumanordnung vollkommen getrennt. Und zweitens sind sie grobmechanischer Art, können demnach von einem durchschnittlichen Monteur dauernd in Stand gehalten werden.

da es durchaus nicht erwiesen ist, daß die Molekularpumpe mit Zuverlässigkeit ein höheres Vakuum zu erreichen erlaubt, als das mit Hilfe der flüssigen Luft, geschweige denn des flüssigen, bzw. gefrierenden Wasserstoffs erreichbare. Dabei ist zu beachten, daß ein Teil der Gasreste aus Wasserstoff besteht, demgegenüber die Molekularpumpe sicher nicht im Vorteil ist.

Eine zweite Frage, die öfters aufgeworfen wird, ist die, weshalb ich mich nicht eines Manometers nach Knudsen¹⁾ bediene. Die Ursache liegt einerseits darin, daß für die hohe Gasverdünnung eine besondere Ausarbeitung dieser Vorrichtung erforderlich ist, welche seit einiger Zeit im hiesigen Institut in Angriff genommen wurde und noch nicht abgeschlossen ist. Andererseits aber darin, daß aus den Messungen folgt: *wenn* ein Einfluß der Gasdichte gerade noch merkbar ist, so ist es diejenige Gasdichte, die in der Entladungssäule unmittelbar über den von der Entladung bespülten und erhitzten Wänden sich einstellt. Diese Gasdichte, die fraglos bedeutend höher als die im übrigen Raume ist und allein für meine Messung in Frage kommt, kann mit dem Manometer nicht gemessen werden. Deshalb darf man sich von der Knudsenschen Vorrichtung nur in einem beschränkten Maße Aufschlüsse über meine Versuche versprechen.

III. Vergleich der zeitlich weit auseinander liegenden Versuchsreihen miteinander.

Das in der Einleitung genannte Gesetz verlangt, daß in verschiedenen Versuchsanordnungen, also in verschiedenen Röhren, die bezüglich der Qualität sowie der Quantität des von den Glaswänden abgegebenen Gases sich nicht gleich verhalten, doch stets die gleiche Grenzfunktion sich einstelle. Nun sind im Laufe der Jahre, über welche die einzelnen Versuche verstreut sind, verschiedene Röhren benutzt worden, und ich will deshalb zunächst die zeitlich um je über zwei Jahre auseinander liegenden Versuchsreihen miteinander vergleichen.

Die Gesichtspunkte, unter denen der Vergleich angestellt werden muß, sind in meiner im Titel angegebenen Arbeit, be-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 29. p. 179. 1909.

sonders p. 699—717, angegeben worden. Von besonderer Wichtigkeit ist — und deshalb mag es hier wiederholt werden, — daß man gute Übereinstimmungen nur in dem Teile der Kurven zu suchen hat, der der Gleichung

$$J = \alpha v^2 + \beta$$

gehorcht, wo J die Stromstärke, v den Potentialgradienten, α und β zwei Konstanten ist. β ist eine kleine Zahl, und für einigermaßen bedeutende Werte der Variablen zu vernachlässigen. Dann erhält die Gleichung die Form $i = x v^2$,¹⁾ wo i die Stromdichte, und, um Verwechslungen vorzubeugen, $\alpha = x$ gesetzt ist. Daraus, sowie aus anderen Überlegungen, ergab sich, daß für den Vergleich der Kurven untereinander die Größe $\alpha = x$ ausschlaggebend, und β nur für besondere Zwecke zu beachten ist.

Unter Berücksichtigung dieses Gedankenganges habe ich dargelegt, daß die in *der nämlichen Röhre*²⁾ unter den verschiedensten Bedingungen sich einstellenden endgültigen, bei weiterem Dauerbetrieb unverändert bleibenden Grenzfunktionen *untereinander* befriedigend übereinstimmen. Diese Gesichtspunkte bleiben auch für die vorliegende Arbeit maßgebend, insbesondere für den folgenden Vergleich der mit *verschiedenen Röhren* im Laufe der Jahre erzielten Grenzfunktionen.

Um den Vergleich zu ermöglichen, habe ich stets das nämliche im ganzen 4—5 cm lange 10 mm weite Rohrstück mit den 30 mm voneinander entfernten Sonden für die Messung benutzt, obwohl die ganze übrige Röhre von Versuchsreihe zu Versuchsreihe neu angefertigt, und auch Qualität und Quantität der adsorbierenden Holzkohle ganz verschieden gewählt wurde.

Nun darf man allerdings nicht behaupten, daß das Sondenstück absolut unverändert geblieben ist. Denn die dünnen Platindrähte kommen nach einer jeden Reinigung in eine etwas andere Lage. Einige Male sind sie auch durch Holzkohle, die infolge eines Bruches der Leitung von der einströmenden Luft mitgerissen wurde, verbogen worden, ferner ist der Durchmesser des Rohres sicher *nicht* genau derselbe geblieben. Er

1) Ann. 1. p. 727—729.

2) Über die Konstruktion vgl. Ann. 1. p. 684—687.

ist vielmehr durch öfteres Reinigen mit Flußsäure, ganz besonders aber durch starke Belastung mit Entladung, sicherlich im Laufe der Zeit um eine Kleinigkeit größer geworden. Bemerkbar macht sich dieses in den Jahren 1911 bis 1913, in welchen Versuche über Kathodenstrahlenabsorption in der Entladungsbahn¹⁾ angestellt wurden. Das Sondenzwischenstück wurde dabei zum Zwecke der Beurteilung des Vakuums stets an der Röhre angebracht, und war oft einer äußerst starken Belastung ausgesetzt.

Unter Beachtung dieser Umstände wird man die in der Tab. 1 gegebenen Zahlen der drei Kolonnen, sowie die entsprechenden Kurven der Fig. 1, mit genügender Annäherung übereinstimmend finden. Die Übereinstimmung wird natürlich noch besser, wenn man statt der Quadrate des Gradienten seine ersten Potenzen ins Auge faßt.

Tabelle 1.

0,0572 · 10 ⁻³ Amp.	10 ⁻³ (Volt) ²		
	1909	1911	1913
12,5	14,0	16,1	12,0
25,0	25,0	22,1	20,0
37,5	28,5	31,6	27,3
50,0	37,8	36,6	36,0
75,0	58,2	58,1	55,0
100,0	83,0	80,6	76,8
125,0	109,0	105,6	100,5
150,0	135,0	133,1	127,0
175,0	161,0	162,6	155,5
200,0	187,2	192,7	179,0

Die Tabelle ist aus den Beobachtungen so entstanden, daß die zu einer Reihe fester Stromwerte i zugehörigen Quadrate des Potentialgefälles v^2 durch Interpolation bestimmt worden sind. In der ersten Kolonne stehen die Stromwerte, in der zweiten die zugehörigen v^2 aus dem Jahre 1909, welche Ann. 1, p. 698, unter dem Datum des 7. Dezember angeführt sind. In der dritten Kolonne die entsprechenden Werte vom

1) Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., p. 420—428. 1912.

15. September 1911, in der vierten diejenigen vom 11. September 1913. Die Röhre befand sich in allen drei Fällen in flüssiger Luft, das Holzkohlegefäß im zweiten Falle im gefrierenden Wasserstoff, im ersten und dritten in flüssiger Luft. Die erste und zweite Kolonne ist mit Oxydkathode, die dritte mit glühender Tantalkathode erzielt worden.

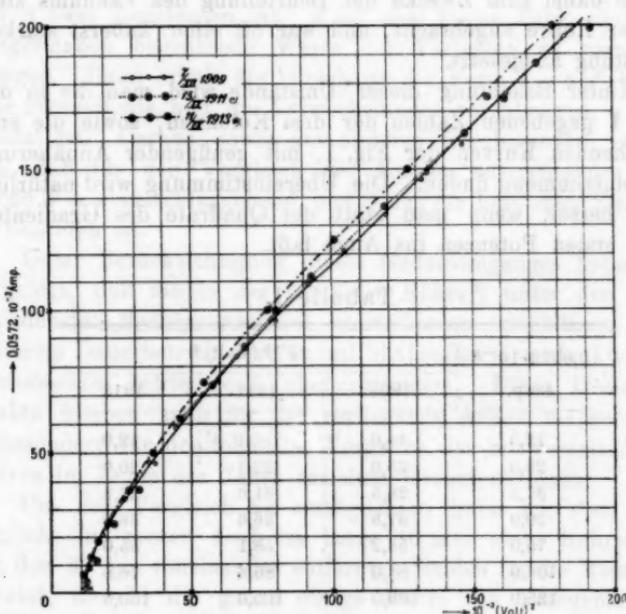


Fig. 1.

Schließlich ist zu bemerken, daß die dem Stromwerte 200 entsprechenden Punkte bereits bei so hoher Belastung des Rohres liegen, daß bei ihnen manchmal größere Abweichungen als bei den anderen Punkten vorzukommen pflegen. Andererseits liegt der dem niedrigsten Stromwerte 12,5 entsprechende Punkt bereits weit außerhalb des Teiles der Kurve, für welchen das Gesetz $i = \alpha v^3 + \beta$ gilt, und für den allein die Konstanz der Grenzfunktion zu beweisen ist.

Man muß sich vergegenwärtigen, wie schwer es sonst bei Untersuchungen über Gasentladungen ist, mit dem nämlichen

Rohre und der nämlichen Gasfüllung an zwei aufeinanderfolgenden Tagen gleiche Meßergebnisse zu erzielen. Dann wird man auch aus diesen, um Jahre auseinander liegenden, unter verschiedenen Bedingungen, an verschiedenen Röhren, mit den verschiedenartigsten Elektroden — also wohl mit qualitativ und quantitativ verschiedener Gasfüllung — erzielten Zahlenreihen den Schluß auf die unumschränkte Gültigkeit des in der Einleitung wiedergegebenen Gesetzes ziehen.

Die nun weiter folgenden Tabellen mit ihren weit besser als in der Tab. 1 übereinstimmenden Zahlen werden noch weiter zu der Befestigung dieses Schlusses beitragen.

IV. Die Versuche mit flüssigem und gefrierendem Wasserstoff.

(Beschreibung des Kryostates: Ann. 1, p. 688.)

Diese Versuchsergebnisse sind in Tab. 2 zusammengestellt. Selbstverständlich ist das Versuchsmaterial nur zum Teile in dieser Tabelle enthalten; außerdem sind die Kurvenpunkte nicht in der geordneten Reihenfolge, sondern in einer variirten Aufeinanderfolge aufgenommen worden. Schließlich sind nur Werte berücksichtigt — mit Ausnahme der Kolonne A und F —, die sich stundenlang unverändert gehalten haben.

Kolonne A enthält Zahlen, bei deren Aufnahme das Holzkohlegefäß in flüssiger Luft tauchte, das Entladungsrohr ungekühlt frei hing. Sie ist mit Absicht in einem Zustand aufgenommen, in welchem noch Gasspuren merklich, also die Grenzwerte des Potentialgefäßes noch nicht erreicht waren, um zu zeigen, wie sich eine Erniedrigung der Temperatur des Holzkohlegefäßes bemerkbar macht.

Kolonne B enthält die *unmittelbar* nach der Zahlenreihe A aufgenommenen Werte; inzwischen ist die flüssige Luft um das Holzkohlegefäß entfernt, und durch flüssigen Wasserstoff ersetzt worden. Man sieht einen Anstieg derjenigen Potentialdifferenzen, welche einer größeren Belastung als der des Stromes 99,3 entsprechen. Das heißt: die durch die Entladung entwickelten Gase werden von der Holzkohle bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs vollständiger entfernt als bei der Temperatur der flüssigen Luft.

Tabelle 2.

$0,572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	10^{-3} (Volt) ²					
	A	B	C	D	E	F
11,8	18,5	14,5	15,5	14,0	15,0	15,2
24,8	21,0	21,0	21,5	21,0	19,5	22,5
36,8	—	—	31,0	30,5	27,5	—
49,8	35,5	36,0	36,0	36,0	37,0	36,5
61,8	—	—	45,5	45,5	46,5	—
74,8	57,5	57,5	57,5	57,0	58,0	58,8
86,8	—	—	68,3	68,3	68,3	—
99,8	79,5	80,0	80,0	79,8	80,5	81,0
111,8	—	—	92,5	92,5	?	—
124,8	108,8	105,2	—	108,5	—	107,0
136,8	—	—	118,5	118,2	118,5	—
149,8	129,7	132,0	132,5	131,0	132,0	134,5
161,8	—	—	147,0	144,5	147,5	—
174,8	157,5	—	162,0	158,5	162,0	164,5
186,8	—	—	178,0	174,0	173,0	—
199,8	186,0	190,0	192,0	191,0	192,0	195,0

Die Kolonnen A, B, C, F entstammen vom 15. September 1911.

Die Kolonne D entstammt vom 16. September 1911.

Die Kolonne E entstammt vom 29. September 1911.

Kolonne C ist unmittelbar nachher beobachtet, als das Entladungsrohr in flüssige Luft getaucht worden ist. Der flüssige Wasserstoff wird um das Holzkohlegefäß während dieser Meßreihe im Vakuum zum Gefrieren gebracht, ohne daß dadurch das Geringste sich ändert. Die Kolonne C entspricht einem über 3 Stunden lang sich nicht mehr ändernden Zustand. Sie kann dahin gedeutet werden, daß bei dem in gefrierenden Wasserstoff tauchenden Kohlegefäß der Einfluß der Kühlung des Entladungsgefäßes mit flüssiger Luft sich genau ebenso bemerkbar macht, wie falls das Holzkohlegefäß in flüssige Luft taucht. Das heißt: der Einfluß der von den durch die Entladung erhitzten Glaswänden abgegebenen Gase ist hier ausschlaggebend demjenigen Gasdrucke gegenüber, der im Gleichgewicht mit der Adsorptionskohle steht. Das ist eine Tatsache, die auch in allen sonstigen Beobachtungen zur Geltung kommt, und zu der Bemerkung p. 3—4 geführt hat, Druckmessungen wären nur in beschränktem Maße von In-

teresse. Die erwähnte Tatsache ist übrigens nicht auffallend, wenn man bedenkt, daß bei der Belastung mit großen Stromstärken die äußere Glaswand des Rohres eine Temperatur von über 300° annimmt. Erheblich heißer ist die innere, von der Entladung bespülte, deutliches Natriumlicht gebende Glasoberfläche.

Kolonne D enthält die am nächsten Tage nach intensiver Vorbehandlung mit Entladung aufgenommene Charakteristik bei *ungekühltem* Rohr und flüssiger Luft um das Holzkohlegefäß. Man sieht eine — besonders bei den großen Stromwerten, größere Annäherung an die Kolonne C, als es in Kolonne A der Fall war.

Kolonne E ist unmittelbar nach Kolonne D aufgenommen. Das Holzkohlegefäß taucht in flüssige Luft, das Entladungsrohr wird ebenfalls mit flüssiger Luft gekühlt. Die Reihe ist mit Reihe C ziemlich identisch.

Alle diese Zahlenreihen A—E zeigen, daß mit einer Vakuumverbesserung immer wieder ein Anstieg des Potentialgefälles verbunden ist, daß dieser Anstieg jedoch stets ganz gering bleibt, so, daß ein Heranrücken eines bereits sehr annähernd erreichten Grenzwertes offenkundig ist.

Eine besondere Stelle gebürt der Kolonne F. Sie enthält *nicht*, wie die anderen Kolonnen, Werte, die während Stunden unverändert geblieben sind, sondern Werte, die zeitlich zwischen Kolonne B und C fallen, und kurz darauf sich einstellen, nachdem bei in flüssigem Wasserstoff sich befindendem Holzkohlegefäß das Entladungsrohr in flüssige Luft getaucht wird. Die Werte der Potentialgradienten sind wenig, aber doch merklich höher, als diejenigen von C und E. Nach einigen Minuten gehen diese höheren Werte allmählich in diejenigen der Kolonne C über. Die Erscheinung ist einige Male aufgetreten, wenn mit flüssigem Wasserstoff gearbeitet wurde. Deshalb soll sie hier erwähnt werden, mit dem Vorbehalt, daß ihre Klärung nachgeholt werden soll, wenn die physikalische Bedeutung der hier behandelten Grenzwerte soweit erkannt sein wird, daß die erforderliche gesteigerte Genauigkeit der Messungen auch zu anderweitig verwertbaren Resultaten führen wird.

V. Die Versuche mit dem Hochvakuumventil.

Diese Versuche wurden während und auch nach den in Tab. 2 wiedergegebenen angestellt, und reihen sich deshalb jenen zwanglos an.

Das Hochvakuumventil hat den Zweck darzutun, daß, wenn die Grenzfunktion nahe erreicht und dem von der Entladung dauernd freigemachten Gas die Gelegenheit zur Holzkohle zu gelangen genommen wird, zunächst die sich an-

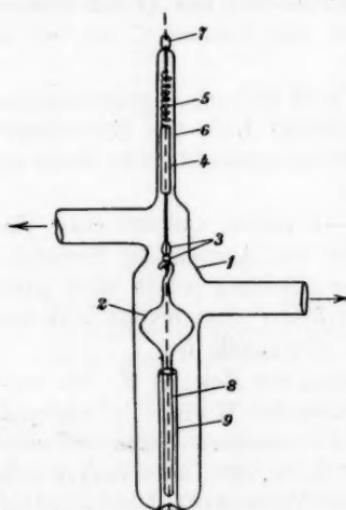


Fig. 2.

einen starken Partialdruck von Kohlewasserstoffen und anderen Unsauberkeiten abgibt, nicht angängig. Deshalb ist zwischen Holzkohlegefäß und Entladungsrohr in die 16 bis 22 mm weite Vakuumleitung das in Fig. 2 wiedergegebene Ventil aus Glas eingefügt worden. Der in die Fläche des Außenkonus 1 eingeschliffene Innenkonus 2 ist vermittelst zweier Kettenglieder 3 an den weichen Eisenkern 4 angehängt. Die Feder 5 verhindert ein Zertrümmern der während des Betätigens der Vorrichtung aufeinanderprallenden Glasteile und dient gleichzeitig zur Verbindung mit dem Außenkontakt 7.

sammelnden Gasspuren einen nur geringen Einfluß auf die Charakteristik haben. Und zwar der Anschauung zufolge, daß in der Umgebung der Grenzfunktion nur eine sehr geringe Änderung der Charakteristik mit der Gasdichte besteht.

Das Hochvakuumventil soll also die Geschwindigkeit der Diffusion der Gasreste von dem Entladungsrohr nach dem Holzkohlegefäß zu regeln gestatten.

Das Anbringen eines gewöhnlichen Glashahnes ist bei dem Hochvakuum infolge des unvermeidlichen Dichtungsmittels, welches

7 ermöglicht aber während des Auspumpens von den Metallteilen eine Entladung einzuleiten, und so die am Metall haftende Gasschicht zu entfernen. Am Innenkonus 2 ist unten axial ein schwacher, langer Rohransatz 8 angebracht, der im Rohr 9, welches am Ventilgehäuse festgeschmolzen ist, gerade geführt wird. Ähnlich wird der Eisenkern 4 im Rohre 6 geführt. Das Schließen des Ventils erfolgt mittels eines Solenoids, durch welches ein Strom von etwa 2 Amp. durchgeschickt wird. Das Solenoid wird an einem über Rollen laufenden Bindfaden gehoben, und nimmt den Eisenkern 4 nebst dem Innenkonus 2 mit.

Selbstverständlich gibt das Ventil niemals einen absolut gasdichten Abschluß. Bei der hohen in Frage kommenden Gasleere ist aber die Zähigkeit der Gase so bedeutend, daß bei fest angezogenem Ventil keine merkliche Diffusion aus dem Entladungsrohr in das Kohlegefäß bei minutenlanger Beobachtung festgestellt werden kann.

Es ist zunächst versucht worden, eine Charakteristik bei geschlossenem Ventil und ungekühltem freihängendem Entladungsrohr aufzunehmen. Tab. 3 enthält in der Kolonne B die Ergebnisse, während Kolonne A die bei offenem Ventil beobachteten Werte vergleichshalber enthält. Man erkennt, daß nur bei maximaler Belastung der zugehörige Potentialgradient sich eben um etwas über 1 Proc. zu ändern anfängt.

Daraus ergibt sich der Schluß, daß man die Versuche mit dem Ventil bei maximaler Belastung, bei der die Außenwand des Rohres auf etwa 300° erhitzt wird, durchzuführen hat. Es werden demnach diese Belastungsproben öfters 5—10 Minuten lang ausgeführt, während deren das Wertepaar 199,3, 185,5 unverändert bleibt. Um nach Verlauf dieser Zeit auch die anderen Punkte der Kurve zu beurteilen, wird der Punkt 99,3, 79,5 festgestellt. Das heißt: Die Kurve B bleibt während der erwähnten Zeitspanne der Belastungsprobe unverändert. Setzt man den Versuch länger fort, dann nimmt der Potentialgradient langsam ab.

Das weist aber darauf hin, daß die Erhitzung der Glaswand einen Dampfdruck über der Glaswand erzeugt, der bei geschlossenem Ventil sich auf ein Gleichgewicht einstellt. Bei offenem Ventil hingegen wird dieses Gleichgewicht durch die Fortdiffusion der Gase merklich gestört, und es kommen da-

durch geringere Gasdichten, also allerdings nur ein wenig höhere Potentialgefälle zustande — wieder ein Beleg für das p. 32—33 Gesagte.

Gleichzeitig ist aber, wenn man die geringe Abweichung zwischen den im freibängenden und in flüssiger Luft befindlichen Entladungsrohr aufgenommenen Kurven berücksichtigt, auch der Beweis der Richtigkeit in der Annahme der Grenzfunktion gebracht. Denn die offenbar in erster Linie für die Erscheinungen ausschlaggebende Gasdichte über den Glaswänden variiert hierbei ganz außerordentlich, und doch ist die Änderung der Charakteristik keine bedeutende.

Tabelle 3.

$0,572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	10^{-3} (Volt) ²		
	A	B	C
11,8	13,5	14,0	12,3
24,3	—	21,0	17,4
36,8	30,0	30,5	—
49,3	35,0	36,0	34,0
61,8	45,0	45,5	—
74,3	56,5	57,0	53,7
86,8	67,8	68,3	—
99,3	79,8	—	75,6
111,8	91,5	92,5	—
124,3	103,0	104,0	100,3
136,8	—	118,2	—
149,3	130,0	131,0	124,2
161,8	144,5	144,5	—
174,3	158,5	158,5	151,0
186,8	174,0	173,8	—
199,3	191,0	185,5	177,0

Die Kolonnen A und B entstammen vom 16. September 1911.
Die Kolonne C entstammt vom 29. September 1911.

Um zu sehen, welcher Art die Gase sind, die den Dampfdruck über der Glaswand bilden, sind die Versuche bei geschlossenem Ventil auch angestellt worden, während das Entladungsrohr in flüssige Luft tauchte. Die Entladungsrohre ist bei maximaler Belastung während 30—40 Minuten betrieben worden. Schließt man das Ventil bei dem aus Tab. 2, Kolonne C

oder E sich ergebenden Wertepaare 199,3, 192, so tritt statt dessen während der genannten Zeit das Wertepaar 199,3, 191 auf, und bleibt konstant bestehen. Entfernt man nun, immer bei geschlossenem Ventil, die flüssige Luft, läßt das Rohr die Zimmertemperatur annehmen, und nimmt eine Kurve auf, so ergibt sich Kolonne C der Tab. 3. Sowie das Ventil geöffnet wird, steigt das Potentialgefälle und es folgen nach kurzer Zeit die Werte der Kolonne A. Während der Beobachtung der Kolonne C sieht man deutlich Gasspuren ein Spektrum emittieren, welches bei Kolonne A kaum merklich ist.

Auch diesmal kann kein Zweifel über die Deutung der Versuche bestehen. Nicht das ganze Rohr, welches in flüssiger Luft taucht, wird von der Entladung erhitzt. An den kalten außerhalb der Strombahn liegenden Stellen kondensieren sich diejenigen Komponenten des Dampfdruckes, welche bei der Temperatur der flüssigen Luft nicht mehr flüchtig sind — also etwa schwere Kohlenwasserstoffe, das aus ihnen und Sauerstoff von der Entladung gebildete Wasser usw. Während die flüchtigeren Komponenten — Sauerstoff, Wasserstoff — denjenigen Teil der abgegebenen Gase bilden, der die kleine, aber doch merkliche und konstantbleibende Verringerung des Potentialgefälles verursacht.

Die spektrale Untersuchung der im Falle der Kolonne C auftretenden Gase ist leicht ausführbar und wird auch im Laufe der Arbeiten der Vollständigkeit wegen auszuführen sein.

VI. Vergleichversuche mit Tantal- und Oxydkathode.

Es wird in meinen früheren Arbeiten öfters darauf hingewiesen, daß die Oxydelektrode keinen Einfluß auf die studierten Erscheinungen ausübt. Sie ist in ihrer Größe und Zusammensetzung in weitesten Grenzen variiert worden. Auch in ihrer Glühtemperatur von höchster, dem Durchschmelzen des Platins knapp vorangehender Weißglut bis zur Rotglut. Ich verweise in dieser Hinsicht auf Ann. 1, p. 714—715, sowie Berichte d. Sächs. Ges. d. Wissensch. 63. p. 537. Daher zog ich an der erstgenannten Stelle den Schluß, daß das Verhalten der Glühkathode nicht gegen die Existenz einer Grenzfunktion der Charakteristik spricht, sondern geradezu als ein Beweis für die hier entwickelten Ansichten gelten kann.

Ich kann heute diese Tatsachen auf Grund mehrjähriger Erfahrung nur bestätigen. Wenn die Glühkathode nur nicht so dunkel geglüht wird, daß die gegenüberliegende Wand der Glaskugel durch die bei Dunkelglut noch zu schnellen Kathodenstrahlen stark erhitzt, und dadurch Gasentwickelung veranlaßt wird, ist es völlig gleichgültig, wie sie beschaffen und wie hoch sie erhitzt ist.

Nun habe ich seit etwa anderthalb Jahren bei meinen Untersuchungen statt der Oxydkathoden glühende Tantaldrähte mit rein metallischer Oberfläche eingeführt. Ich tat es aus Gründen rein technischer Natur — die Tantalelektroden sind bedeutend zuverlässiger als die Oxydelektroden. Das Verhalten der studierten Erscheinungen ist — wie nicht anders zu erwarten war — dadurch nicht im geringsten beeinflußt worden. Ich habe trotzdem einen genauen Vergleich der beiden Elektroden ausgeführt, einerseits, weil es ordnungshalber nötig ist, die Einführung eines neuen Elementes in die Anordnung zu rechtfertigen. Andererseits aber, weil es immerhin eine fernere Erweiterung des Gültigkeitsbereiches für das Gesetz der Grenzfunktion bedeutet. Gleichzeitig erledigten sich durch diese Versuchsreihen die Schlüsse, welche Hr. Fredenhagen¹⁾ aus seinen — übrigens ganz andere Zwecke verfolgenden und demnach auch ganz anders gearteten — Untersuchungen als möglicherweise für das vorliegende Gebiet zutreffend gezogen hat.

Zu dem Zwecke des Vergleiches ließ ich in einem ellipsoidartig abgeflachten Glaskörper die beiden Drahtschlingen 1 und 2 (Fig. 3) anordnen — die eine aus Tantal, die andere aus dem in üblicher Weise mit Oxyden überzogenen Platindraht. Die beiden Elektroden konnten gleichzeitig von verschiedenen Quellen geheizt werden. Die Entladung konnte in wenigen Sekunden von der einen auf die andere umgelegt werden. Die Temperatur der Elektroden, sowie der Umstand, ob sie gleichzeitig glühten oder nicht, beeinflußt nichts an der Charakteristik.

Die Messungen sind in Tab. 4 wiedergegeben. Unter A ist der Vergleich der beiden Elektroden bei *nicht* gekühltem freihängendem Entladungsrohr in der letzten Periode des Ent-

1) Karl Fredenhagen, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaft. 65. p. 67—69 (1913).

gasungsstadiums gegeben, wo also die Gasdichte noch groß genug ist, um eine bedeutende Abweichung von der Grenzfunktion zu geben. Man sieht, daß schon in diesem Stadium so gut wie Identität der beiden Charakteristiken sich einstellt. Das ist ein neuer Beweis für die schon mehrfach gestützte Behauptung, daß es die Gasabgabe von den in der Entladungsbahn erhitzen Glaswänden ist, welche die kleinen Änderungen in der Nähe des Grenzwertes der Charakteristik bewirkt. Die Gasabgabe von den Glähelektroden macht sich gegenüber derjenigen von den Glaswänden gar nicht bemerkbar. Es sei hinzugefügt, daß über die Zeitdauer, die erforderlich ist zur Entgasung eines glühenden Drahtes, sowie die von ihm

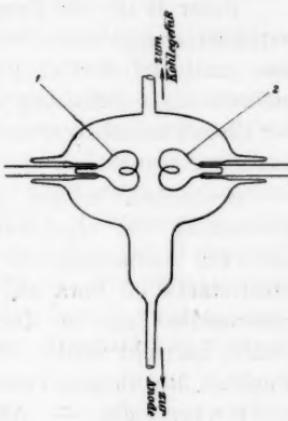


Fig. 3.

Tabelle 4.

0,572 · 10 ⁻³ Amp.	10 ⁻⁸ · (Volt) ²					
	A		B		C	
	Oxyd	Tantal	Oxyd	Tantal	Oxyd	Tantal
6,3	12,0	12,0	11,5	11,5	11,0	11,5
12,5	12,5	12,5	12,0	11,5	12,0	13,5
19,0	15,5	—	16,0	15,5	16,5	17,0
25,0	19,0	19,0	19,0	19	20,0	20,5
37,5	26,0	26,0	26,3	26	27,3	31,0
50,0	34,0	33,5	34,5	34,5	36,0	40,0
75,0	51,5	51,5	—	58,5	55,0	55,0
100,0	72,4	71,9	75,4	75,4	76,8	76,8
125,0	93,5	93,5	98,5	98,5	100,5	100,5
150,0	116,0	116,0	124,5	125,0	127,0	127,0
175,0	142,0	142,0	151,7	151,7	155,5	155,5
200,0	168,5	167,5	179,0	179,5	185,0	184,5

Die Kolonnen A entstammen vom 8. September 1913.

Die Kolonnen B entstammen vom 10. September 1913.

Die Kolonnen C entstammen vom 11. September 1913.

abgegebenen Gasmengen im allgemeinen sehr übertriebene Vorstellungen zu herrschen scheinen.

Unter B ist der Vergleich der beiden Glühelektroden bei ebenfalls ungekühltem freihängendem Entladungsrohr gegeben, aber nachdem der endgültige unter diesen Umständen bei mehrstündiger Belastung sich nicht mehr ändernde Grenzwert der Charakteristik erreicht war. Auch hier ist ein Unterschied kaum wahrzunehmen.

Schließlich bringen die Zahlenreihen unter C den nach Erreichung des Grenzwertes sich einstellenden Tatbestand, falls das Entladungsrohr in flüssige Luft taucht. Von der Stromstärke 65 etwa an, also in dem hier allein in Frage kommenden Teile der Kurve, welcher das Gesetz $J = \alpha v^3 + \beta$ erfüllt, herrscht wieder völlige Übereinstimmung. Bei einigen Punkten des übrigen Teiles der Kurve scheinen — wenn auch nicht wesentliche — Abweichungen vorzuliegen. Man vergleiche hierüber Ann. 1, p. 700, c), sowie ebenda p. 710, wo aus dem im Verhältnis mit dem oberen Teile der Kurve mehr ungeregelten Verlauf des unteren Teiles auf Verschiedenheit der Gasfüllung geschlossen wird. In der Tat wäre es denkbar, daß, wenn durch Kühlung mit flüssiger Luft die Dampfabgabe der Glaswände zurückgedrängt wird, in diesen kleinen Abweichungen individuelle Verschiedenheiten der beiden Elektroden sich zu erkennen geben.

Das Ergebnis der Tab. 4 läßt sich demnach dahin zusammenfassen, daß

erstens die Gasabgabe von den Glühelektroden selbst im höchsten Vakuum sich nicht bemerkbar macht und

zweitens eine Tantal- und eine Oxydelektrode in dem in Frage kommenden Gebiete übereinstimmende Resultate ergeben.

VII. Eine allgemeine Betrachtung.

Eine Deutung der experimentell gefundenen Zusammenhänge ist bereits früher (Ann. 1, p. 725—737) gegeben worden. Ich möchte jene Überlegungen durch einen einfachen Gedankengang ergänzen, der zum Teil bereits veröffentlicht ist.¹⁾

1) Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 63. p. 337—339. 1911.

Längs der Achse des Entladungsrohres ist experimentell (Ann. 1, p. 720) eine lineare Verteilung des Potentials gefunden worden.

Quer zur Achse ist (Ann. 1, p. 721) aus dem allgemeinen Aussehen der Entladung auf eine homogene Verteilung der Stromdichte geschlossen worden. Diese homogene Verteilung ergibt sich aber auch aus der folgenden Überlegung. Es ist (Ann. 1, p. 729) nachgewiesen worden, daß unabhängig von der Gestalt des Entladungsrohres stets einer bestimmten Stromdichte i ein bestimmtes Potentialgefälle v zugeordnet ist. Bezeichnet man allgemein die Stromstärke mit J , den Querschnitt der Entladungsbahn mit q , und sind in zwei verschiedenen Entladungsbahnen, deren Querschnitte bzw. q_1 und q_2 sind, bei konstantem Potentialgefälle v die Stromstärken bzw. J_1 und J_2 , so gilt

$$J_1 = \alpha q_1 v,$$

$$J_2 = \alpha q_2 v,$$

falls α eine Konstante ist. Daraus folgt:

$$\frac{J_1 - J_2}{q_1 - q_2} = \frac{J}{q},$$

oder wenn für $J_1 - J_2 = \Delta J$, $q_1 - q_2 = \Delta q$ gesetzt wird:

$$\frac{\Delta J}{\Delta q} = \frac{J}{q}.$$

Es herrscht also, falls man bei konstantem Potentialgefälle v den Entladungsquerschnitt allmählich erweitert, in einem jeden neu hinzutretenden Querschnittselement die nämliche Stromdichte, d. h.: Die Stromdichte i ist im ganzen Querschnitt konstant verteilt.

Unter Berücksichtigung der eindeutigen, von der Röhrenform unabhängigen Zuordnung von Potentialgefälle und Stromdichte kann folglich auch das Potentialgefälle nicht anders als im Querschnitt senkrecht zur Stromrichtung unveränderlich sein. Es besitzen also die beiden Vektoren: das Potentialgefälle und die Stromdichte im ganzen Raum je einen konstanten Wert, ihrer Richtung nach sind sie aber der Rohrachse parallel angeordnet. Daraus folgt für die Potentialfunktion φ selbst:

$$\Delta^2 \varphi = 0,$$

ein Ausdruck dafür, daß *in der Entladungsbahn keine räumliche Dichte der Elektrizität vorhanden ist*.

Allerdings sind die zur Ableitung dieser Gleichung benutzten Annahmen mit gewissen Vernachlässigungen verknüpft. Diese führen aber — falls die Entladungstromdichte genügend groß ist — zu keinen großen Fehlern (Ann. 1, p. 729). Die einzige Konsequenz des so entstehenden Fehlers ist, daß streng genommen eine gewisse sehr geringe Raumdichte der negativen Ladung besteht.

Da aber andererseits in der Entladungsbahn eine ungeordnete Bewegung negativer Elektronen besteht, welche im Vergleich mit den in geordneter Bewegung die Stromleitung besorgenden Elektronen sehr zahlreich und auch mit außerordentlich großer Energiemenge behaftet sind (Ann. 1, p. 728), so ist fraglos eine große Dichte negativer Elektrizitätsträger vorhanden. Um diese Dichte mit der Tatsache der verschwindend kleinen negativen Raumladung in Einklang zu bringen, ist man gezwungen, eine dieser negativen Raumdichten annähernd gleichwertige *positive* Raumdichte anzunehmen.

Das ist aber gleichbedeutend mit der Annahme des Bestehens eines *Dissoziationszustandes* in der positiven Lichtsäule.

Nun ist dieser Zustand durch die Entladungscharakteristik gegeben. Überträgt man auf ihn die Existenz einer Grenzfunktion der Charakteristik, so erhält man die folgende Fassung:

Wird in der beschriebenen Weise durch genügend weitgehend luftleer gemachten Raum eine Stromdichte entladen, die einen gewissen Wert übersteigt, so ist damit die Erzeugung eines Dissoziationszustandes in der Strombahn verknüpft. Die Aufrechterhaltung dieses Zustandes erfordert einen Energieaufwand, der wie die $\frac{3}{2}$ Potenz der Stromdichte wächst, und von einer gewissen Güte des Vakuums an sich nur sehr wenig mit der Gasdichte ändert.

Denn es ist (p. 4)

$$i = \propto v^2,$$

also die Energie:

$$E = i v = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \cdot i^{\frac{3}{2}}.$$

Im Grenzfalle wäre α unabhängig von den Gasresten, daher $1/\sqrt{x}$ der Energieumsatz pro Zeiteinheit¹⁾, welcher erforderlich ist, um diejenige Dissoziation im absoluten Vakuum aufrechtzuerhalten, die an das Bestehen der Stromdichte = 1 geknüpft ist. Offenbar ist die Richtigkeit dieser letzten Fassung an die Bedingung geknüpft, daß, falls die geringste bisher erreichte Gasdichte noch weiterer Verringerung unterworfen würde, das Bild der hier in Frage kommenden Vorgänge sich nicht ändert. Und diese Bedingung als erfüllt ansehen, heißt eine Extrapolation einführen, die zunächst befremdend wirkt. Für die Erklärung der großen Konstanz der beobachteten Grenzwerte ist diese Extrapolation vielleicht aber doch eine einfachere Annahme als alle anderen Annahmen, die notwendigerweise die Ionisation der variablen Gasreste zu Hilfe nehmen und so den Widerspruch in sich tragen müßten, unter identischen Entladungsbedingungen bei *variabler* Anzahl der Moleküle eine *konstante* Anzahl positiver Ionenladungen mit einem *konstanten* Energieaufwand zu bilden.

Ich habe versucht, unter Aufrechterhaltung der Annahme einer Ionenbildung Erklärungen zu schaffen. Eine dieser Überlegungen ist in den Ber. d. Kgl. Sächs. Akad. d. Wiss. 63. p. 537 wiedergegeben. Sie scheint mir aber ebenfalls keine konsequente Erklärung zu liefern, und deshalb sei an dieser Stelle nur auf sie hingewiesen.

Die mit der Tatsache der Existenz des dargestellten Dissoziationszustandes im extremen Vakuum zu verknüpfenden Vorstellungen würden an Klarheit gewinnen, wenn quantitative Angaben hinsichtlich der Größe der in Frage kommenden freien Ladung beiderlei Vorzeichens gegeben werden könnten. Nun habe ich (Ann. 1, p. 725—727) darauf hingewiesen, daß die in dem Raume, in welchem der Dissoziationszustand herrscht, sich befindenden negativen Elektronen eine freie Weglänge besitzen, die verschwindend klein ist gegenüber derjenigen Weglänge, die ihnen allein auf Grund der Gasdichte zukommt. Ich habe ferner (dem Ann. 1, p. 736 aufgestellten Arbeitsplan

¹⁾ Über eine mögliche, jedoch innerhalb der experimentell erreichbaren Temperaturgrenzen geringe Änderung von α mit der Temperatur der Röhrenwand vgl. den folgenden Abschnitt VIII.

folgend) zeigen können¹⁾), daß Kathodenstrahlen, die mit einer Geschwindigkeit bis zu 10000 Volt etwa in die Bahn der Entladung von einer unabhängigen Quelle hineingeschleudert werden, innerhalb dieser Bahn verlangsamt und zerstreut werden. Und es ist einleuchtend, daß das Bekanntwerden des Zusammenhangs zwischen Kathodenstrahlengeschwindigkeit, Stromdichte und der Anzahl der Zusammenstöße, die die Kathodenstrahlen auf ihrem Wege durch die Entladungsbahn erleiden, quantitative Aufschlüsse über den in der Entladungsbahn herrschenden Dissoziationszustand geben werden.

Eine weitere Eigenschaft, die dem Raume zukommt, in welchem der Dissoziationszustand herrscht, ist die, daß eine auf ein negatives Potential aufgeladene Elektrode in einem vom Vakuum scheinbar ebenfalls unabhängigem Maße in die Lage versetzt wird, Kathodenstrahlen auszusenden.²⁾ Doch fehlen hier noch die exakten Messungen, die allein die Richtigkeit dieser Ansicht beweisen können.

VIII. Ein Rückschluß.

Aus dem im vorangehenden Abschnitt Dargelegten ergibt sich ein für die Beurteilung eines Teiles der Versuche wesentlicher Gesichtspunkt. Es ist stillschweigend angenommen worden, die Temperatur der Glaswände der Entladungsbahn könne die Charakteristik nur insofern beeinflussen, als hierdurch die Gasdichte beeinflußt wird. Nun entziehen aber die Glaswände, falls die Temperatur der Entladungsbahn hoch ist, sie selbst aber stark gekühlt werden, Energie aus der Entladungsbahn.

Andererseits gehört zur Aufrechterhaltung einer gegebenen Stromdichte ein gegebener Dissoziationszustand, dem wieder ein gegebener Energieinhalt pro Raumeinheit entspricht. Ein gewisser Bruchteil dieser Energie tritt offenbar als Energie der Wärmebewegung auf. Wird folglich an den Raumgrenzen viel Wärme entzogen, so muß für Aufrechterhaltung der nämlichen Energiedichte im Raume ein größerer Energieumsatz

1) J. E. Lilienfeld, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 64 p. 420—428. 1912.

2) Vgl. Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen 18. p. 256 bis 259. 1912.

vollbracht werden. Mit anderen Worten: Das Potentialgefälle längs einer gegebenen Stromdichte ist auch direkt Funktion des Temperaturgefälles senkrecht zur Rohrwand, und es muß steigen, wenn die Rohrwand gekühlt wird.

Man entnimmt den Tabellen 2 und 4, daß bei gekühltem Rohr tatsächlich stets ein etwas höheres Potentialgefälle auftritt. Zu welchem Teile diese Erhöhung auf Verringerung der Gasdichte — und zu welchem auf Wärmeabgabe an den Wänden zurückzuführen ist, wird erst dann gesagt werden können, wenn das genannte Temperaturgefälle und die Bedingungen der Wärmeleitung in den zu vergleichenden Fällen bekannt sein werden.

IX. Zusammenfassung.

In Verfolgung des ersten Punktes des Ann. 1, p. 736 aufgestellten Arbeitsprogrammes hat es sich ergeben, daß sämtliche die Verbesserung des Vakuums beabsichtigenden Mittel nichts an den bereits früher für ein engeres Gebiet bewiesenen Gesetzmäßigkeiten ändern. Jede Verbesserung des Vakuums ruft entweder gar keine oder nur eine geringe Änderung der Charakteristik hervor. Im letzten Falle entspricht stets der höhere Potentialgradient dem besseren Vakuum so, daß das nahe Vorhandensein einer Grenzfunktion unzweifelhaft ist. Wenn auch weitere Vervollkommenung des Vakuums — etwa mit Hilfe von verflüssigtem Helium — von Interesse wäre, so scheint es doch auf Grund der vorliegenden Erfahrungen unwahrscheinlich, daß eine weitere Verringerung der Gasdichte an den Gesetzmäßigkeiten etwas ändern würde. Dieser Schluß wird auch durch die Tatsache nahegelegt, daß die geringen Änderungen, welche die Charakteristik in dem bearbeiteten Gebiete erleidet, nur noch durch sehr merkliche Gasabgabe von den Glaswänden, und nicht mehr durch die Änderungen der Gasdichte über dem gekühlten Adsorptionsgefäß bedingt werden.

Es ist ferner der experimentelle Gültigkeitsbereich der Gesetze durch den Nachweis absoluter Identität zwischen einer Oxydelektrode nach Wehnelt und dem Verhalten eines Tantaldrähtes in bezug auf die studierten Erscheinungen erweitert worden.

Schließlich ist die Auffassung entwickelt worden, daß die Konstante α der Gleichung

$$i = \alpha v^2$$

mit dem Energieumsatz zusammenhängt, der zur Aufrechterhaltung eines in der ersten Größenordnung von der Gasdichte unabhängigen Dissoziationszustandes im extremen Vakuum erforderlich ist.

Hinsichtlich der Genauigkeit der hier veröffentlichten Messungen mag noch hervorgehoben werden, daß aus den Tabellen die Möglichkeit der Erreichung viel größerer Übereinstimmungen hervorgeht. Genauere Messungen wären aber einerseits mit einem viel größeren Aufwand an Hilfsmitteln und Arbeit verknüpft. Und andererseits hätte man keine Möglichkeit, sie zu verwerten, so lange die physikalischen Verhältnisse (Kathodenstrahlenabsorption, Temperatur, Wärmeleitfähigkeit in dem untersuchten Gebilde) nicht geklärt sind. Deshalb wird die Untersuchung zuerst den letzteren Weg gehen müssen.

Zum Schlusse sei es mir auch an dieser Stelle gestattet, Hrn. Prof. O. Wiener für die stetige Unterstützung der zum Teil langwierigen Untersuchungen meinen tiefempfundenen Dank auszusprechen.

Auch der Königlich Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig gebührt mein Dank für wiederholte Überlassung von Mitteln aus eigenem Fonds sowie aus der Härtelstiftung.

Leipzig, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 22. Oktober 1913.)

**3. Bemerkung zu einer Mitteilung
der Herren E. Wagner und J. Kutschewski
über „Feldkanalstrahlen“;
von J. Stark.**

Stellt man dicht hinter einer Glimmstromkathode, durch deren Kanäle Kanalstrahlen laufen, parallel zu ihr eine zweite durchlöcherte Elektrode auf und hält man zwischen dieser und der Kathode eine Spannungsdifferenz aufrecht, so werden die von den primären Kanalstrahlen durch Stoßionisierung geschaffenen positiven Ionen und negativen Elektronen von dem elektrischen Feld zwischen der Glimmstromkathode und der sekundären Elektrode beschleunigt und treten dann durch die Löcher der zwei Elektroden als Kanal- bzw. Kathodenstrahlen aus. Diese Erscheinung habe ich im Jahre 1911 auf Grund von Beobachtungen¹⁾ eingehend zergliedert. Kürzlich haben nun die Herren E. Wagner und J. Kutschewski²⁾ nach derselben Methode Kanalstrahlen aus den von primären Kanalstrahlen erzeugten positiven Ionen durch Beschleunigung in einem elektrischen Feld zwischen einer Glimmstromkathode und einer sekundären Elektrode (Anode) erzeugt und sie „Feldkanalstrahlen“ genannt. Gegen Ende ihrer Mitteilung nehmen sie auf meine vorausgehende Arbeit mit folgender Fußnote Bezug: „Diese Kathodenstrahlen beschreibt schon J. Stark, Physik. Zeitschr. 11. p. 171. 1910 bei einer der unsrigen gleichen Versuchsanordnung; jedoch entging ihm die Beobachtung der Feldkanalstrahlen, obwohl er deren Existenz richtig vermutete.“

Die vorstehende Behauptung der Herren Wagner und Kutschewski, daß mir die Beobachtung der „Feldkanalstrahlen“ entgangen sei, entspricht nicht den Tatsachen. Ich sehe hierbei ab von der bereits erwähnten Mitteilung, in der die „Feldkanalstrahlen“ als etwas ziemlich Selbstverständliches

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 11. p. 171. 1910.

2) E. Wagner u. J. Kutschewski, Ann. d. Phys. 42. p. 665. 1913.

behandelt wurden, und verweise auf eine bereits im Jahre 1904 erschienene Mitteilung¹⁾, in welcher eine andere Methode zur Herstellung von sekundären Kanalstrahlen („Feldkanalstrahlen“) beschrieben wurde. Es entstehen nämlich, wie in dieser Mitteilung auf Grund von Beobachtungen gezeigt wurde, derartige Kanalstrahlen auch, wenn man hinter einer primären Glimmstromkathode eine durchlöcherte sekundäre Kathode und ihr gegenüber eine sekundäre Anode so aufstellt, daß die primären Kanalstrahlen an der Oberfläche der sekundären Kathode entlang zwischen ihr und der ihr gegenüberstehenden sekundären Anode verlaufen. Durch das elektrische Feld vor der sekundären Kathode werden die von den primären Kanalstrahlen erzeugten positiven Ionen beschleunigt und treten durch die Kanäle der sekundären Kathode als Kanalstrahlen in einen kräftefreien Raum. Man kann sich so sekundäre Kanalstrahlen („Feldkanalstrahlen“) machen, die nur einen kleinen Kathodenfall durchlaufen haben.

Diese zweite Methode zur Erzeugung von sekundären Kanalstrahlen („Feldkanalstrahlen“) verdient offenbar gegenüber der obigen ersten Methode den Vorzug, da sie mit einfacheren Versuchsbedingungen arbeitet. Es verlaufen nämlich bei ihr die sekundären Kanalstrahlen nach ihrer Beschleunigung im elektrischen Feld für sich allein in einem kräftefreien Raum. Bei der ersten Methode dagegen müssen sie, wenn sie auf die primäre Kathode zulaufen, den Kathodenfall des primären Glimmstroms passieren und mischen sich dann mit primären Kathodenstrahlen und solchen primären Kanalstrahlen, welche mit negativer Ladung von der primären Kathode weg beschleunigt wurden. Die zweite von mir angegebene Methode zur Erzeugung hat auch in der Literatur Beachtung gefunden; so haben H. v. Dechend und W. Hammer²⁾ in ihrem Bericht über die Kanalstrahlen im elektrischen und magnetischen Feld auf sie verwiesen.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule Aachen,
20. Oktober 1913.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 13. p. 389. 1904.

2) H. v. Dechend u. W. Hammer, Jahrb. d. Rad. u. El. 8. p. 65. 1911.

4. *Interferenz von Röntgenstrahlen und Wärmebewegung;*
von P. Debye.

In einigen Notizen habe ich versucht, Belege dafür beizubringen¹⁾, daß die Wärmebewegung der Kristallatome einen wesentlichen Einfluß hat auf die von Friedrich-Knipping-Laue entdeckten und von Laue²⁾ schon theoretisch behandelten Interferenzen von Röntgenstrahlen. Ebenso wie das bei der ursprünglichen Einsteinschen Theorie der spezifischen Wärme der Fall war, wurden bei dieser Berechnung alle Atome als voneinander unabhängig betrachtet und jedes derselben als einfach schwingendes Gebilde in die Rechnung eingeführt. Außerdem aber wurde noch die weitere Beschränkung gemacht, daß die Beobachtungstemperatur so hoch sei, daß von einer Abweichung von der Äquipartition der Energie noch keine Anzeichen zu bemerken sind. Die Summation der Wirkung des jetzt nicht mehr wie bei Laue starren Atomgerüstes auf den einfallenden Strahl ergab dann das Fehlen einer Wirkung auf die Schärfe der Interferenzmaxima und die Existenz eines Intensitätseffektes. Es wurde so ein Grund dafür gefunden, daß merkbare Interferenzintensität meistens nur in Richtungen auftritt, die kleine Winkel mit dem einfallenden Strahl bilden und damit zugleich, daß die sogenannte Reflexion von Röntgenstrahlen unter gewöhnlichen Umständen nur bei nicht zu steilem Einfall beobachtet wird. Ferner lehrt die Rechnung, wie infolge der Wärmebewegung die Interferenzintensität immer begleitet sein muß von einer zerstreuten Strahlung, welche maximal dort auftritt, wo die Interferenzintensität am

1) P. Debye, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 678, 738 u. 857. 1913.

2) M. v. Laue, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss., p. 308, 1912. Man vergleiche außerdem die Zusammenstellung im „Rapport du deuxième Conseil de physique Solvay“.

schwächsten ist. Außerdem zeigten die Formeln, wie die kleine, im wesentlichen von der geringen Kompressibilität herrührende Amplitude der Wärmebewegung von Diamantatomen Ursache wird von der Sonderstellung, welche dieser Körper auch hier wieder einnimmt.

Wegen der oben angezeigten Beschränkungen konnte die Theorie nur als ein erster Schritt auf dem Wege nach einer vollständigen theoretischen Beschreibung gelten. Beobachtet ist bis jetzt nur das abnormale Verhalten des Diamanten, aber selbst die Frage, ob die Interferenzerscheinungen durch Temperaturänderungen in ihrem Aussehen beeinflußt werden, ist bisher experimentell noch nicht in Angriff genommen. Unter diesen Umständen mag es voreilig scheinen, die Theorie über das schon durch die Näherungsrechnungen Erreichte auszubauen zu wollen. Dennoch haben wir das im folgenden ausgeführt, von dem Gedanken ausgehend, daß es für die experimentelle Prüfung bequemer sein muß, über die Richtigkeit unserer Vorstellungen zu entscheiden, wenn man sich einer bis zu gewissem Grade¹⁾ abgeschlossenen Theorie gegenüber befindet.

Die Erweiterung der Theorie haben wir ausgeführt in den beiden obengenannten Richtungen.

Erstens haben wir die Annahme der gegenseitigen Unabhängigkeit der Atome fallen gelassen. Die Bewegung derselben ist in dieser Notiz zusammengesetzt aus übereinander gelagerten elastischen Wellen, deren Schwingungszahlen das elastische Spektrum des Körpers durchlaufen, ein Verfahren, das sich ja bei der Theorie der spezifischen Wärme bewährt hat.

Zweitens haben wir uns dadurch die Gelegenheit geschaffen, die Quantenhypothese in unzweideutiger Weise auch in diesem Falle zur Anwendung zu bringen. Für oder gegen die Nullpunktsenergie haben wir uns nicht entschieden. Der einzige berechtigte Standpunkt ist vorläufig wohl der, beide Hypothesen vollständig auf ihre Folgen zu prüfen, wenn auch verschiedene neuere Arbeiten von A. Einstein und O. Stern, H. Kamerling-Onnes, W. H. Keesom, E. Oosterhuis schwerwiegende Gründe für die Annahme einer Nullpunkts-

1) Man vgl. die Anmerkung auf p. 65.

energie bringen. Das war in unserem Falle um so angebrachter, da es sich zeigt, daß man durch Beobachtung der Interferenzen von Röntgenstrahlen eine wahrscheinlich nicht schwer zu handhabende Methode erhält, die Frage zu entscheiden. Tatsächlich ist es von vornherein klar, daß, wenn überhaupt die vorgeschlagene Theorie in ihren Grundlagen richtig ist, das mittlere Quadrat der Amplitude der Atombewegungen und nicht der Differentialquotient dieser Größe nach der Temperatur (wie bei der spezifischen Wärme) maßgebend sein muß. Gerade mit Rücksicht auf diese experimentell beizubringende Entscheidung haben wir die Theorie bis zu einer numerisch brauchbaren Formel durchgeführt und eine numerische und graphische Erläuterung daran angeknüpft. Freilich konnte letzteres wieder nur erreicht werden, indem wir die allgemeine Formel durch näherungsweise Auswertung des elastischen Spektrums auf eine handlichere Gestalt brachten, aber diese Näherungsmethode hat sich schon einmal bei der Berechnung der spezifischen Wärme bewährt und dürfte voraussichtlich auch hier nicht zu wesentlich fehlerhaften Resultaten führen, wenigstens, soweit man sich beschränkt auf einatomige Körper oder solche, welche wie Sylvin z. B. als einatomig behandelt werden dürfen.

Eine Zusammenfassung am Schluß stellt die verschiedenen Gesetze zusammen, zu welchen die hier vorgeschlagene Auffassung führt.

§ 1. Mathematische Formulierung der Hauptfrage.

Die primäre Welle sei eben und monochromatisch mit der Schwingungszahl ω in 2π sec. Wir beziehen dieselbe auf ein rechtwinkeliges x, y, z -Koordinatensystem, indem sie sich fortpflanzt in einer Richtung, welche mit den Koordinatenachsen die Richtungcos. $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bildet. Setzen wir abkürzend

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi c}{\omega},$$

wenn λ die Wellenlänge und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet, dann wird die Amplitude dieser Welle bis auf den Zeitfaktor proportional:

$$e^{-i\omega(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)}.$$

Versteht man unter x, y, z die Koordinaten eines Atoms, dann mißt diese Funktion zugleich die Phase der von diesem Atom ausgehenden sekundären Strahlung.

Wir setzen nun für ein beliebiges Atom

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v, \quad z = z_0 + w;$$

dabei bedeuten x_0, y_0, z_0 die Koordinaten dieses Atoms für den Fall, daß keine Wärmebewegung vorhanden ist; wenn keine Nullpunktsenergie existiert, also die Koordinaten im absoluten Nullpunkt. Die Größen u, v, w dagegen sind die Komponenten der Verschiebung, welche in unregelmäßiger Weise im Laufe der Zeit wechselt.

Beobachten wir den Körper in großem Abstande und nennen die Entfernung des angenommenen Aufpunktes von dem beliebig herausgegriffenen Atom R , während der Abstand bis zum Nullpunkt des Koordinatensystems r gesetzt wird, dann können wir mit genügender Genauigkeit setzen:

$$R = r - [\alpha(x_0 + u) + \beta(y_0 + v) + \gamma(z_0 + w)],$$

wenn α, β, γ die Richtungscos. der Richtung Nullpunkt—Aufpunkt bedeuten, vorausgesetzt, daß der strahlende Kristall sich in unmittelbarer Nähe des Nullpunktes unseres Koordinatensystems befindet.

In einem beliebigen Moment findet man mit Rücksicht auf die eben angegebenen Formeln für die Amplitude der vom ganzen Kristall ausgesandten sekundären Strahlung den Wert:

$$(1) \quad A \frac{e^{-i\pi r}}{r} \sum e^{i\pi[(\alpha - \alpha_0)(x_0 + u) + (\beta - \beta_0)(y_0 + v) + (\gamma - \gamma_0)(z_0 + w)]}.$$

Die Summation ist zu erstrecken über alle Atome des Körpers, der Faktor A kann eine Funktion von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ sein und wird z. B. dann eine bekannte, leicht angebbare Form annehmen, wenn die Quelle der sekundären Strahlung sich z. B. einem schwingenden Elektron ähnlich verhält. Über diese Abhängigkeit soll im folgenden nicht die Rede sein, wir werden alle folgenden Resultate der Einfachheit halber so aussprechen, als ob A konstant wäre. In einer Hinsicht ist die obige Formel für die Amplitude schon spezialisiert. Besteht nämlich das Kristallmolekül aus verschiedenen Atomen, dann werden die verschiedenen chemischen Individuen auch im allgemeinen bei

gleicher Anregung verschieden stark strahlen. Um ganz allgemein zu sein, müßte man also A unter das Summenzeichen bringen und bei der Summation die Verschiedenheit der Koeffizienten A berücksichtigen. Wir sehen von vornherein von dieser Komplikation ab und behandeln den Kristall so, als ob alle Atome gleich wären.

Die durch die Wärmebewegung verursachten Schwankungen von u, v, w verlaufen sehr langsam im Vergleich mit den jeder Welle eigentümlichen Schwankungen der elektrischen Amplitude. Während einer kleinen Zeit, welche wir in bezug auf die Zeitdauer einer Schwingung des Röntgenstrahls als sehr groß, in bezug auf die für eine merkliche Schwankung der Anordnung der Atome nötige Zeit aber als Moment auffassen können, finden wir demnach die Intensität J der sekundären Strahlung, indem wir bei unverändertem u, v, w die Gleichung (1) mit dem konjugiert komplexen Werte multiplizieren. So erhält man:

$$(2) \left\{ J = \frac{A^2}{r^2} \sum \sum e^{i \kappa [(a - a_0)(x_0 - x_0') + (\beta - \beta_0)(y_0 - y_0') + (\gamma - \gamma_0)(z_0 - z_0')]} \right. \\ \left. e^{i \kappa [(a - a_0)(u - u') + (\beta - \beta_0)(v - v') + (\gamma - \gamma_0)(w - w')]} \right\},$$

dieselben Größen, welche für die Ausführung der ersten Summation mit $x_0 \dots w$ angedeutet sind, haben wir für die Ausführung der zweiten Summation mit einem Strich versehen.

Die beobachtbare mittlere Intensität hat Bezug auf eine Zeitdauer, welche wieder groß ist, verglichen mit der Zeit der Schwankungen der Atomanordnung. Um dieselbe zu finden, müssen wir also in (2) ein zweites Mal mitteln, und zwar in bezug auf die Verschiebungen u, v, w , welche lediglich im letzten Faktor der Formel (2) auftreten. Ist die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Anordnung bekannt, dann kann der Mittelwert dieses Faktors berechnet werden. Es sei dieser Mittelwert durch

$$e^M$$

dargestellt, dann folgt also für J_m der endgültige Ausdruck

$$(3) J_m = \frac{A^2}{r^2} \sum \sum e^M e^{i \kappa [(a - a_0)(x_0 - x_0') + (\beta - \beta_0)(y_0 - y_0') + (\gamma - \gamma_0)(z_0 - z_0')]}.$$

In den folgenden Paragraphen beschäftigen wir uns zunächst

mit der Berechnung der oben genannten Wahrscheinlichkeit und dem daraus folgenden Ausdruck für e^M . Wie Gleichung (3) zeigt, bildet die Bestimmung dieses Mittelwertes die Hauptfrage, welche zu beantworten ist.

§ 2. Einführung von Normalkoordinaten.

Ebenso wie bei der Berechnung der spezifischen Wärme ist auch hier die Einführung von Normalkoordinaten bei der Darstellung der Atombewegung von großem Nutzen. Wir könnten zu diesem Zweck ausgehen von den gewöhnlichen elastischen Differentialgleichungen für ein Stadium mit stetiger Raumerfüllung und würden so eine angenäherte Theorie entwickeln können, ebenso wie das für die Berechnung der mittleren Wärmeenergie geschehen ist.¹⁾ Statt dessen wollen wir hier aber von vornherein die atomistische Struktur des Körpers zur Geltung bringen und uns deshalb bei der Definition der neuen Koordinaten anschließen an die Ausführungen von Born und v. Kármán.²⁾ Allerdings wird bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse über die Atomkräfte dadurch, wenigstens vorläufig, praktisch nicht viel gewonnen, denn bekanntlich erfordert die genaue Berechnung der Atombewegung mit Berücksichtigung der kürzesten mitwirkenden elastischen Wellen die Kenntnis einer viel größeren Zahl von „elastischen Konstanten“ als uns die gewöhnlichen, auf den elastischen Differentialgleichungen sich stützenden Messungen liefern können. Ja sogar bei Beschränkung auf tiefe Temperaturen, wo man nur die langen elastischen Wellen zu berücksichtigen braucht, führt die genaue Berechnung von dem in diesem Falle allein benötigten Anfang des elastischen Spektrums zu Rechnungen, welche immerhin so kompliziert sind, daß sie bis jetzt noch nicht für den einfachsten Fall des regulären Kristalls durchgeführt wurden. Wir werden versuchen die Vorteile der beiden Methoden so gut als möglich auszunutzen, indem wir einerseits bei der Einführung der Normalkoordinaten Born und v. Kármán folgen, so daß für den gesuchten Mittelwert eine Formel entwickelt werden kann, welche in mathematischer Hinsicht vollständig bestimmt ist und dennoch eine allgemeine Gültig-

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 39. p. 789. 1912.

2) M. Born u. Th. v. Kármán, Physik. Zeitschr. 14. p. 65. 1913.

keit beanspruchen darf. Andererseits werden wir dann aber nachträglich verschiedene Vereinfachungen einführen, welche unumgänglich sind, will man ein bestimmtes, praktisch brauchbares Resultat erreichen und welche im wesentlichen wieder die Rückkehr zu einer auf die elastischen Differentialgleichungen gestützten Methode bedeuten.

Dieser Anordnung entsprechend stellen wir in diesem Paragraphen einige Formeln zusammen, welche bei der Einführung der Normalkoordinaten zu benutzen sind. Dieselben sind nur zur bequemeren Orientierung hier angeführt und enthalten nichts Neues gegenüber den Ausführungen von Born und v. Kármán.

Betrachtet man statt dem endlichen Kristall einen unendlich ausgedehnten, dann kann jede stehende Welle als Eigenschwingung angesehen werden. Der Elementarbereich des Kristalles sei ein rechtwinkeliges Paralleloliped mit den Kantenlängen a, b, c ; die Ruhelage eines beliebigen Atoms sei mittels dreier ganzen Zahlen l, m, n definiert durch die Koordinaten la, mb, nc . Definiert man die stehende Welle durch ihre Phasenebenen

$$(4) \quad \Omega = l\varphi + m\psi + n\chi = \text{const}$$

unter Einführung dreier Phasenkonstanten φ, ψ, χ , dann können die Verschiebungen dargestellt werden in der Form:

$$(5) \quad \begin{cases} u = \mathfrak{A} \cos \Omega e^{i\omega t}, \\ v = \mathfrak{B} \cos \Omega e^{i\omega t}, \\ w = \mathfrak{C} \cos \Omega e^{i\omega t} \end{cases}$$

oder

$$(5') \quad \begin{cases} u = \mathfrak{A} \sin \Omega e^{i\omega t}, \\ v = \mathfrak{B} \sin \Omega e^{i\omega t}, \\ w = \mathfrak{C} \sin \Omega e^{i\omega t}, \end{cases}$$

wenn dafür gesorgt ist, daß die Verhältnisse der Konstanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die Schwingungszahl ω in $2\pi \text{ sec}$ den symmetrischen Gleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} A\mathfrak{A} + F\mathfrak{B} + E\mathfrak{C} = \mu \omega^2 \mathfrak{A}, \\ F\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + D\mathfrak{C} = \mu \omega^2 \mathfrak{B}, \\ E\mathfrak{A} + D\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} = \mu \omega^2 \mathfrak{C} \end{cases}$$

genügen.

Hierbei bedeutet μ die Masse des Kristallatoms, während A, B, C, D, E, F im allgemeinen periodische Funktionen von φ, ψ, χ sind. Die Koeffizienten dieser Entwickelungen sind praktisch allerdings nicht alle bekannt, man würde dieselben erst dann angeben können, wenn man über die Kräfte, welche die Atome aufeinander ausüben, völlig orientiert wäre. Für kleine Werte der Phasenkonstanten φ, ψ, χ , d. h. also für Wellen, deren Wellenlänge groß ist gegenüber dem Atomabstand, kann man die Koeffizienten $A \dots C$ dagegen in den gewöhnlichen elastischen Konstanten ausdrücken. Benutzt man die Bezeichnung von Voigt, dann findet man durch Vergleichung mit den elastischen Gleichungen für das rhomboedrische System:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{b}{a} c_{11} \varphi^2 + \frac{c}{b} c_{66} \psi^2 + \frac{a}{c} c_{55} \chi^2, \\ B = \frac{c}{b} c_{22} \psi^2 + \frac{a}{c} c_{44} \chi^2 + \frac{b}{a} c_{66} \varphi^2, \\ C = \frac{a}{c} c_{33} \chi^2 + \frac{b}{a} c_{55} \varphi^2 + \frac{c}{b} c_{44} \psi^2, \\ D = a(c_{23} + c_{44}) \psi \chi, \\ E = b(c_{31} + c_{55}) \chi \varphi, \\ F = c(c_{12} + c_{66}) \varphi \psi, \end{array} \right.$$

wenn $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}, c_{23}, c_{31}, c_{12}$ die neun zu diesem Kristallsystem gehörigen elastischen Konstanten bedeuten.

Für das reguläre System $a = b = c$ ist:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}, \quad c_{23} = c_{31} = c_{12}$$

und kann also für den gleichen Grenzfall wie oben:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = a[c_{11} \varphi^2 + c_{44}(\psi^2 + \chi^2)], \\ B = a[c_{11} \psi^2 + c_{44}(\chi^2 + \varphi^2)], \\ C = a[c_{11} \chi^2 + c_{44}(\varphi^2 + \psi^2)], \\ D = a(c_{12} + c_{44}) \psi \chi, \\ E = a(c_{12} + c_{44}) \chi \varphi, \\ F = a(c_{12} + c_{44}) \varphi \psi, \end{array} \right.$$

gesetzt werden.

Für einen wirklich isotropen Körper schließlich könnte man (7) noch weiter vereinfachen, da bekanntlich in diesem Falle

$$(8) \quad 2c_{44} = c_{11} - c_{12}$$

gesetzt werden muß, so daß zwei elastische Konstanten zur Definition des Körpers in üblicher Weise ausreichen.

Sieht man nun $A \dots F$ als bekannt an, dann folgt in bekannter Weise, daß man (6) nur genügen kann, wenn ω^2 einer Gleichung dritten Grades genügt, welche drei positive reelle Wurzeln $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ hat. Zu jeder dieser Wurzeln gehören gleichzeitig bestimmte Verhältnisse $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$, so daß noch für jeden Fall eine multiplikative Konstante beliebig festgesetzt werden kann. Über diese Konstante werde so verfügt, daß die Summe der Quadrate der von dem Faktor $e^{i\omega t}$ in (5) und (5') stehenden Lagenfunktionen jetzt aber für einen endlichen Kristall mit der Atomzahl N berechnet den Wert 1 hat. Dann ist

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{C}_2^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \mathfrak{C}_3^2 = \frac{1}{N}, \end{cases}$$

gültig für jede beliebige Schwingungszahl. Führt man nun nach dieser Normierung die Lagenfunktionen:

$$(10) \quad \begin{cases} U = \mathfrak{A} \cos \Omega, & U'' = \mathfrak{A} \sin \Omega, \\ V = \mathfrak{B} \cos \Omega, & V'' = \mathfrak{B} \sin \Omega, \\ W = \mathfrak{C} \cos \Omega, & W'' = \mathfrak{C} \sin \Omega, \end{cases}$$

als Eigenfunktionen ein, wobei wir die zu den drei verschiedenen Wurzeln der Gleichung für ω^2 gehörigen Funktionen noch durch die Indizes $k = 1, 2, 3$ voneinander unterscheiden wollen, dann haben Born und v. Kármán gezeigt, daß man die Verschiebungen u, v, w durch diese Eigenfunktionen darstellen kann in der Form:

$$(11) \quad \begin{cases} u = \frac{N}{(2\pi)^3} \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k (Q_k' U_k' + Q_k'' U_k''), \\ v = \frac{N}{(2\pi)^3} \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k (Q_k' V_k' + Q_k'' V_k''), \\ w = \frac{N}{(2\pi)^3} \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k (Q_k' W_k' + Q_k'' W_k''). \end{cases}$$

Die Größen Q_k' und Q_k'' , welche beliebige Funktionen von φ, ψ, χ sind, können als die gesuchten Normalkoordinaten

angesehen werden; die Integration ist über die verschiedenen möglichen Phasen zu erstrecken, d. h. also für jede der Größen φ, ψ, χ , z. B. von $-\pi$ bis $+\pi$. Die Ausdrücke (11) repräsentieren eine Darstellung, welche eigentlich erst für $\lim N = \infty$ erreicht wird. Zum ferneren Gebrauch schreiben wir dieselben in einer etwas abweichenden Form, welche damit im Hinblick auf den sehr großen Wert von N als identisch angesehen werden kann, aber die Existenz von $3N$ Freiheitsgraden klarer in den Vordergrund rückt. Zu diesem Zwecke konstruiere man in einem φ - ψ - χ -Koordinatensystem den Phasenwürfel, welcher dem Integrationsbereich in (11) entspricht und teile diesen Würfel durch Ebenen parallel den Koordinatenebenen in N gleiche Elementarwürfel. Jedes Tripel $\sum_k (Q_k' U_k' + Q_k'' U_k'')$ usw., kann dann z. B. als zum Mittelpunkt eines solchen Elementarwürfels gehörig betrachtet werden. An Stelle der Integration in (11) tritt nun sinngemäß eine Summation über diese N -Punkte des Phasenwürfels, welche mit Rücksicht darauf, daß das Raumelement $d\varphi d\psi d\chi$ durch $(2\pi)^3/N$ ersetzt werden kann, unter Einführung des Summenzeichens \mathcal{S} den Verschiebungen u, v, w die Form gibt:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \mathcal{S} \sum_k (Q_k' U_k' + Q_k'' U_k''), \\ v = \mathcal{S} \sum_k (Q_k' V_k' + Q_k'' V_k''), \\ w = \mathcal{S} \sum_k (Q_k' W_k' + Q_k'' W_k''). \end{array} \right.$$

In derselben Weise zeigt sich, daß die potentielle Energie Φ und die kinetische Energie T durch die Normalkoordinaten Q ausgedrückt werden können in der Form:¹⁾

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \frac{\mu}{2} \mathcal{S} \sum_k \omega_k^2 (Q_k'^2 + Q_k''^2), \\ T = \frac{\mu}{2} \mathcal{S} \sum_k (\dot{Q}'^2 + \dot{Q}''^2). \end{array} \right.$$

Wir erinnern noch daran, daß neben den Gleichungen (9), welche die Normierung ausdrücken:

1) Der Punkt bedeutet in der üblichen Weise eine Differentiation nach der Zeit.

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{C}_1^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{C}_2^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{B}_3^2 + \mathfrak{C}_3^2 = \frac{1}{N} \end{array} \right.$$

zwischen den neun Koeffizienten noch drei Beziehungen bestehen, welche ohne weiteres aus (6) erhalten werden können, nämlich:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 = 0, \\ \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_3 = 0, \\ \mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_1 = 0. \end{array} \right.$$

Die zwei Gleichungstripel (14) und (15) schließlich ziehen zwei weitere Gleichungstripel nach sich, von der Form:

$$(14') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2 = \frac{1}{N}, \\ \mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2 = \frac{1}{N} \end{array} \right.$$

und

$$(15') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3 = 0, \\ \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{B}_3 \mathfrak{C}_3 = 0, \\ \mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_3 = 0, \end{array} \right.$$

wie das bei der Transformation zweier Koordinatensysteme aufeinander gezeigt wird.

§ 3. Berechnung des gesuchten Mittelwertes für den Fall verschwindender Nullpunktsenergie.

Jede Eigenschwingung des Kristalles wurde im vorigen Paragraphen zusammengesetzt aus einer sin- und einer cos-Welle, welche noch mit beliebiger durch Q' und Q'' charakterisierter Amplitude vorkommen konnte. Wir wollen die räumlich konstante Phase der aus diesen beiden zusammengesetzten Welle δ nennen und dementsprechend setzen

$$(16) \quad Q' = Q \cos \delta, \quad Q'' = Q \sin \delta;$$

die Phase δ sei im folgenden als zeitlich konstant betrachtet, so daß damit das Verhältnis $Q' : Q''$ festgelegt ist. Nach (13) folgen dann für die potentielle, resp. kinetische Energie die Formeln:

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \sum_k \omega_k^2 Q_k^2,$$

$$T = \frac{\mu}{2} \sum_k \dot{Q}_k^2,$$

oder auch indem wir die zu Q gehörige Impulskoordinate P einführen:

$$(17) \quad \begin{cases} \Phi = \frac{\mu}{2} \sum_k \omega_k^2 Q_k^2, \\ T = \frac{1}{2\mu} \sum_k P_k^2. \end{cases}$$

Im $6N$ -dimensionalen Q - P -Raum nehmen wir nun ein Volumenelement

$$dR = dQ_1 dP_1 \dots dQ_{3N} dP_{3N}$$

an, dann kann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unser Atom-
system Koordinaten und Impulse hat, welche diesem Element entsprechen, stets gleich

$$w dR$$

gesetzt werden, wobei w eine Funktion bedeutet, welche je nach der zugrunde gelegten Hypothese über die Wärmebewegung eine andere Form annimmt. Auf alle Fälle aber liefert die Einführung der Normalkoordinaten die Möglichkeit w in ein Produkt von Einzelfaktoren $w_1 \dots w_{3N}$ zu zerlegen, von denen jeder nur von zwei zusammengehörigen Impuls- und Lagerkoordinaten abhängt. Dasselbe gilt aber auch von der am Ende des § 1 genannten Funktion, deren Mittelwert zu bestimmen ist, da die Verschiebungen linear in P und Q ausdrücken sind. Nach (12) hat man nämlich mit Rücksicht auf (16)

$$u = \sum_k Q_k \mathfrak{U}_k \cos(\Omega - \delta),$$

$$v = \sum_k Q_k \mathfrak{V}_k \cos(\Omega - \delta),$$

$$w = \sum_k Q_k \mathfrak{C}_k \cos(\Omega - \delta),$$

wenn wir nach (10) die Bedeutung von $U' V' W'$, $U'' V'' W''$ in Rechnung ziehen. Der Exponent der Exponentialfunktion, deren Mittelwert zu bestimmen ist, kann also nach § 1 auf die Form gebracht werden:

$$(18) \begin{cases} i\alpha[(\alpha - \alpha_0)(u - u') + (\beta - \beta_0)(v - v') + (\gamma - \gamma_0)(w - w')] = \\ i\alpha \sum_k Q_k \{\cos(\Omega - \delta) - \cos(\Omega' - \delta)\}[(\alpha - \alpha_0)\mathfrak{A}_k + (\beta - \beta_0)\mathfrak{B}_k \\ + (\gamma - \gamma_0)\mathfrak{C}_k] \end{cases}$$

wenn wie früher Ω eine Abkürzung ist für den Ausdruck

$$\Omega = l\varphi + m\psi + n\chi,$$

während Ω' zu einem anderen in seiner Ruhelage durch die Zahlen l', m', n' charakterisierten Atom gehört und definiert wird durch die Beziehung

$$\Omega' = l'\varphi + m'\psi + n'\chi.$$

Bezeichnen wir ein beliebiges Glied der Summe (18) durch den Index s und machen dasselbe mit der zu den entsprechenden Koordinaten Q_s und P_s gehörigen Einzelwahrscheinlichkeit, dann haben wir nach der oben als möglich erkannten Zerlegung nur den Wert

$$(19) \begin{cases} K_s = \\ \iint e^{i\alpha Q_s \{\cos(\Omega - \delta) - \cos(\Omega' - \delta)\}[(\alpha - \alpha_0)\mathfrak{A}_s + (\beta - \beta_0)\mathfrak{B}_s + (\gamma - \gamma_0)\mathfrak{C}_s]} \mathfrak{w}_s dQ_s dP_s \end{cases}$$

zu bestimmen. Das Produkt dieser zweifachen Integrale über alle möglichen Werte von s (von 1 bis $3N$) erstreckt liefert dann den im § 1 mit e^M bezeichneten Mittelwert. So erhalten wir also:

$$(20) \quad e^M = \prod_s K_s$$

oder nach Logarithmierung:

$$(20') \quad M = \sum_s \log K_s.$$

Zur Berechnung von K_s setzen wir vorübergehend abkürzend:

$$(21) \quad \begin{cases} \varrho_s = \alpha \{\cos(\Omega - \delta) - \cos(\Omega' - \delta)\}[(\alpha - \alpha_0)\mathfrak{A}_s \\ + (\beta - \beta_0)\mathfrak{B}_s + (\gamma - \gamma_0)\mathfrak{C}_s], \end{cases}$$

dann wird

$$(22) \quad K_s = \iint e^{i\varrho_s Q_s} \mathfrak{w}_s dQ_s dP_s.$$

Zeichnet man nun in einer Q_s - P_s -Ebene die Kurven

$$(23) \quad \frac{\mu}{2} \omega_s^2 Q_s^2 + \frac{P_s^2}{2\mu} = \text{const.} = E,$$

auf welchen also die partiellen, zu den Koordinaten Q_s , P_s gehörende Energie E nach (17) const. ist, dann besagt die

Plancksche Quantenhypothese in ihrer ursprünglichen Form bekanntlich, daß für die Wahrscheinlichkeit eines durch Q_s, P_s definierten Teilzustandes nur die Kurven eine Rolle spielen, deren Flächeninhalt ein ganzes Vielfaches des elementaren Wirkungsquantums h ist. In bekannter Weise folgt dann für die const. in Gleichung (23) der Wert

$$(24) \quad E = \frac{z h \omega_s}{2\pi},$$

wenn z die ganze Zahl bedeutet, mit der h zu multiplizieren ist, um den zu der betreffenden Kurve gehörigen Flächeninhalt zu bestimmen.

Wir berechnen zunächst den Mittelwert von $e^{i\varphi_s Q_s}$, welches zu einer dieser Kurven gehört. Dazu führen wir an Stelle der Koordinaten Q_s, P_s die Phase der in der Kurve $E = \text{const.}$ stattfindenden Bewegung φ ein, indem wir setzen

$$Q_s = \sqrt{\frac{2E}{\mu \omega_s^2}} \cos \varphi, \quad P_s = \sqrt{2\mu E} \sin \varphi;$$

jeder Punkt der Ellipse (23) ist dann durch einen Wert von φ zwischen 0 und 2π charakterisiert, während alle Werte von φ gleich wahrscheinlich sind. Der zu einer Kurve $E = \text{const.}$ gehörige Mittelwert von $e^{i\varphi_s Q_s}$ ergibt sich also zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_s Q_s} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_s \sqrt{\frac{2E}{\mu \omega_s^2}} \cos \varphi} d\varphi.$$

Im allgemeinen führt die Ausrechnung dieses Integrals auf Besselsche Funktionen, man überzeugt sich indessen leicht, daß in unserem Falle eine Entwicklung nach Potenzen des Faktors von $\cos \varphi$ im Exponenten gestattet ist¹⁾, welche bei der zweiten Potenz dieses Faktors abgebrochen werden kann. Tatsächlich zeigt nämlich die Normierung (9), daß eine solche Entwicklung nach negativen Potenzen von $N^{\frac{1}{2}}$ fort- schreitet, so daß man sich wegen dem sehr großen Werte von N ohne irgendwie merklichen Fehler auf diejenigen Glieder der Entwicklung beschränken kann, welche nach Ausführung

1) Die Entwicklung ist hier möglich im Gegensatz zu dem früher diskutierten Fall (Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. p. 749. 1913), weil die Amplitude der Einzelbewegung jetzt außerordentlich klein ist (von der Ordnung $1/\sqrt{N}$ gegen früher).

aller Rechnungen Glieder von der Ordnung N^0 liefern. Auch vom praktischen Standpunkte aus ist die Näherung verständlich, denn erstens ist nach unserem Ansatz die ganze Bewegung eines Atoms zusammengesetzt aus $3N$ Einzelbewegungen, während zweitens bei der Berechnung von K_s nur eine einzelne dieser notgedrungen äußerst minimalen Bewegungen eine Rolle spielt.

Führt man die Entwicklung aus, dann findet man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho_s Q_s} d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[1 + i\varrho_s \sqrt{\frac{2E}{\mu\omega_s^2}} \cos\varphi \right. \\ &\quad \left. - \varrho_s^2 \frac{E}{\mu\omega_s^2} \cos^2\varphi \dots \right] \\ &= 1 - \frac{\varrho_s^2}{2\mu\omega_s^2} E, \end{aligned}$$

oder nach Einsetzen des Wertes (24) für E :

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho_s Q_s} d\varphi = 1 - z \frac{\hbar\varrho_s^2}{4\pi\mu\omega_s}.$$

Die Wahrscheinlichkeit nun, daß die Bewegung durch einen beliebigen Punkt auf der Ellipse mit dem Inhalt $z\hbar$ dargestellt wird, ist in bekannter Weise proportional:

$$e^{-\frac{z\hbar\omega_s}{2\pi kT}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der darstellende Punkt auf irgendeiner Ellipse in der Q_s, P_s -Ebene liegt, ist 1, deshalb ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ellipse mit dem Index z numerisch gleich:

$$(26) \quad \frac{e^{-z\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}}{\sum_z e^{-z\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}} = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}\right) e^{-z\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}.$$

Multipliziert man jetzt den für eine Ellipse in (25) angegebenen Mittelwert mit der Wahrscheinlichkeit (26) und summiert dann über alle Ellipsen, d. h. über z von 0 bis ∞ , dann ist das Resultat nach (22) der gesuchte Wert von K_s , der sich also ergibt in der Form:

$$(27) \quad K_s = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}\right) \sum_z \left(1 - z \frac{\hbar\varrho_s^2}{4\pi\mu\omega_s}\right) e^{-z\frac{\hbar\omega_s}{2\pi kT}}.$$

Nun ist einerseits:

$$\left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}}\right) \sum_s e^{-\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}} = 1;$$

andererseits findet man leicht

$$\left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}}\right) \sum_s s e^{-\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}} - 1},$$

also kann für K_s auch geschrieben werden:

$$(28) \quad K_s = 1 - \frac{\varrho_s^2}{2\mu \omega_s^2} \frac{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}} - 1},$$

während mit derselben Genauigkeit $\log K_s$ sich hieraus durch Potenzentwickelung ergibt zu

$$(28') \quad \log K_s = - \frac{\varrho_s^2}{2\mu \omega_s^2} \frac{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi k T}} - 1}.$$

Um hieraus M zu finden, muß nach (20') über alle möglichen Werte von s summiert werden. Nun ist nach dem früheren die Summation nach s so zu verstehen, daß man in jedem der N Punkte des Phasenwürfels zunächst die Summe über die drei zu diesem Punkte gehörigen Schwingungszahlen bildet und nachträglich über alle N Punkte dieses Würfels summiert. Führen wir jetzt der besseren Übersicht halber für diese Summation wieder das frühere Zeichen \sum_k ein und setzen zugleich für ϱ_s den Wert (21) ein, dann erhält man¹⁾:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M = \sum_k \frac{\varrho^2}{2\mu \omega_k^2} \frac{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi k T}} - 1} - [(\alpha - \alpha_0) \mathfrak{A}_k + (\beta - \beta_0) \mathfrak{B}_k \\ \quad + (\gamma - \gamma_0) \mathfrak{C}_k]^2 \{ \cos(\Omega - \delta) - \cos(\Omega' - \delta) \}^2. \end{array} \right.$$

In diesem Ausdruck tritt vorläufig noch die räumlich konstante Phase δ der Einzelschwingungen auf. Nun ist es aber wohl sicher, daß bei einem wirklichen Kristall jede Einzel-

1) Der Index k ist nicht zu verwechseln mit der Boltzmannschen Konstante k , welche in der Verbindung $k T$ in derselben Formel vorkommt.

schwingung nicht, wie das in der Theorie vorausgesetzt ist, ewig ohne Änderung bestehen kann. Die Schwingungen werden vielmehr ihre Phase δ unregelmäßig ändern, und zwar so, daß keine Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Eigenschwingungen im Mittel bestehen. Das berechtigt uns dazu, nicht (29) als den endgültigen Ausdruck für M anzusehen, sondern dafür den nach δ genommenen Mittelwert zu substituieren.¹⁾ Führt man diese Mittelwertsbildung aus, dann erhält man schließlich:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M = S \sum_k \frac{\alpha^2}{\mu \omega_k^2} \frac{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi k T}} - 1} [(\alpha - \alpha_0) \mathfrak{U}_k + (\beta - \beta_0) \mathfrak{B}_k \\ \quad + (\gamma - \gamma_0) \mathfrak{C}_k]^2. \end{array} \right.$$

Nur in einem Falle hat man diesen Ausdruck durch einen anderen zu ersetzen, nämlich dann, wenn $\Omega = \Omega'$ ist, d. h., wenn sich in dem ursprünglich zur Mittelwertsbildung vorgegebenen Ausdruck die Verschiebungen u, v, w und u', v', w' auf dasselbe Atom beziehen, oder, anders ausgedrückt, wenn zugleich:

$$l = l', \quad m = m', \quad n = n'$$

ist. In diesem Spezialfalle wird einfach

$$(30') \quad M = 0.$$

Wir rekapitulieren die einzelnen Schritte, welche zur Berechnung von M nötig sind. Nachdem die elastischen „Konstanten“ des Kristalls A, B, C, D, E, F für eine Welle mit der Phasenebene

$$l\varphi + m\psi + n\chi = \text{const.}$$

als Funktionen von φ, ψ, χ angesetzt sind, berechne man aus (6) die drei mit diesen Gleichungen verträglichen Werte der Schwingungszahl in $2\pi \text{ sec}$, welche wir ω_k (mit $k = 1, 2, 3$) nannten und die

1) Die Mittelwertsbildung wurde hier so ausgeführt, als ob die Bewegungen naher Atome vollständig von einander unabhängig sind. Das steht mit der Gleichung (29) selbst im Widerspruch, nach welcher vielmehr eine Einzelwelle durch den ganzen Körper hindurch ungestört zu verfolgen wäre. Das wirkliche Verhalten der Wellen wird zwischen diesen beiden äußersten liegen und steht in direktem Zusammenhang mit der Frage nach der Wärmeleitfähigkeit. Auf den zweiten hier nicht weiter berücksichtigten Grenzfall beabsichtige ich demnächst zurückzukommen.

zugehörigen Koeffizienten $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{C}_k$, welche unter Hinzuziehung der Normierungsbedingungen (9) ebenso wie ω_k absolut bestimmt sind, als Funktionen der Phasen φ, ψ, χ . Sind dann außerdem die Richtungscos. der einfallenden primären Röntgenwelle $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, die Richtungscos. der Beobachtungsrichtung α, β, γ und die Wellenlänge der Strahlung λ gegeben, dann kann die \sum_k von (30) berechnet werden, da $\chi = 2\pi/\lambda$ gesetzt wurde. Schließlich liefert die Summation \mathbb{S} über alle im Phasenwürfel gleichmäßig verteilten N Punkte den gesuchten Wert von M .

Für die Diskussion von M und die daran anzuschließende Berechnung der Intensität J_m verweisen wir auf § 5. Hier begnügen wir uns mit der Angabe der allgemeinen Formel; im nächsten § 4 wird die Rechnung unter Annahme einer Nullpunktsenergie bis zu dem entsprechenden Stadium ausgeführt.

§ 4. Berechnung des gesuchten Mittelwertes unter Annahme einer Nullpunktsenergie.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen können bis zur Formel (22) ohne Änderung auf den jetzigen Fall übertragen werden, denn nach wie vor bleibt eine Zerlegung von w in w_1 bis w_{3N} möglich. Eine Abweichung gegen früher tritt demnach erst bei der wirklichen Ausrechnung des Doppelintegrals:

$$K_s = \iint e^{i\varphi_s Q_s} w_s dQ_s dP_s,$$

da jetzt w_s anders zu definieren ist. Bekanntlich besteht der Unterschied zwischen dem neueren und dem älteren Planckschen Ansatz, so weit dieser für uns in Betracht kommt, darin, daß die Rolle, welche im vorigen Paragraphen den einzelnen Ellipsen: Energie = const. zugeteilt wurde, jetzt übernommen wird von den elliptischen Ringen, welche durch diese Ellipsen begrenzt werden und dementsprechend alle den Flächeninhalt \hbar besitzen. Ähnlich wie im § 3 zuerst der Mittelwert von $e^{i\varphi_s Q_s}$ auf einer Ellipse bestimmt wurde, haben wir nunmehr diesen Mittelwert zu bestimmen für einen beliebigen der elliptischen Ringe.

Machen wir auch jetzt wieder den Ansatz

$$Q_s = \sqrt{\frac{2E}{\mu \omega_s^2}} \cos \varphi, \quad P_s = \sqrt{2\mu E} \sin \varphi,$$

dann haben wir E nicht als konstant, sondern als veränderlich anzusehen zwischen den Grenzen

$$E = z \frac{\hbar \omega_s}{2\pi} \quad \text{bis} \quad E = (z+1) \frac{\hbar \omega_s}{2\pi}.$$

In den neuen Koordinaten E und φ wird das Flächen-element der Q, P -Ebene dargestellt durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{\omega_s} dE d\varphi,$$

unter Einführung dieser Koordinaten findet man also den gesuchten Mittelwert für einen der elliptischen Ringe nach der Formel:

$$\frac{\iint e^{iQ_s \left(\frac{2E}{\mu \omega_s^2} \right)^{1/2} \cos \varphi} dE d\varphi}{\iint dE d\varphi},$$

wenn die Integration über φ von 0 bis 2π und über E zwischen den oben angegebenen Grenzen ausgestreckt wird.

Ebenso wie oben ist es gestattet, die Exponentialfunktion unter dem Integralzeichen nach Potenzen des Exponenten zu entwickeln und nur die ersten Glieder beizubehalten. So findet man:

$$\begin{aligned} \iint e^{iQ_s \left(\frac{2E}{\mu \omega_s^2} \right)^{1/2} \cos \varphi} dE d\varphi &= \iint dE d\varphi \left[1 + iQ_s \left(\frac{2E}{\mu \omega_s^2} \right)^{1/2} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q_s^2 E}{\mu \omega_s^2} \cos^3 \varphi + \dots \right] \\ &= 2\pi \frac{\hbar \omega_s}{2\pi} - \frac{\pi Q_s^2}{2\mu \omega_s^2} \left(\frac{\hbar \omega_s}{2\pi} \right)^2 \{(z+1)^2 - z^2\}, \end{aligned}$$

andererseits ist

$$\iint dE d\varphi = 2\pi \frac{\hbar \omega_s}{2\pi},$$

also wird der Mittelwert, für einen der elliptischen Ringe berechnet:

$$(31) \quad 1 - \frac{Q_s^2}{2\mu \omega_s^2} \frac{\hbar \omega_s}{2\pi} \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

Nach der allgemeinen Formel (22) für K_s und mit Rücksicht auf die Überlegungen, welche zu den Formeln (26) und (27) des vorigen Paragraphen führten, welche hier ohne weiteres übertragen werden können, ergibt sich nach Eintragung des Mittelwertes (31):

$$(32) \quad K_s = \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega_s}{2\pi kT}}\right) \sum_z \left[1 - \frac{\hbar \varrho_s^2}{4\pi \mu \omega_s} \left(z + \frac{1}{2}\right)\right] e^{-z \frac{\hbar \omega_s}{2\pi kT}}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von (27) nur dadurch, daß unter dem Summenzeichen einmal $z + \frac{1}{2}$ statt z auftritt, er ist genau so auszurechnen, wie das im § 3 im Anschluß an (27) angedeutet wurde und liefert:

$$(33) \quad K_s = 1 - \frac{\varrho_s^2}{2\mu \omega_s^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_s}{2\pi} + \frac{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi kT}} - 1} \right\}$$

und im Anschluß daran

$$(33') \quad \log K_s = - \frac{\varrho_s^2}{2\mu \omega_s^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_s}{2\pi} + \frac{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{2\pi kT}} - 1} \right\}.$$

Da nun weiterhin der jetzt für $\log K_s$ gefundene Ausdruck sich von dem früher gefundenen nur im Bau des Klammerausdruckes unterscheidet und insbesondere hier wie dort der Faktor ϱ_s^2 in gleicher Weise vorkommt, darf man die Überlegungen des vorigen Paragraphen bezüglich der Phasen δ ohne Änderung übertragen. Deshalb kann das Schlußresultat M ohne weiteres angegeben werden.

Man findet:

$$(34) \quad -M = S \sum_k \frac{s^2}{2\mu \omega_k^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_k}{2\pi} + \frac{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{2\pi kT}} - 1} \right\} [(\alpha - \alpha_0) \mathfrak{A}_k + (\beta - \beta_0) \mathfrak{B}_k + (\gamma - \gamma_0) \mathfrak{C}_k]$$

für alle Fälle mit Ausnahme des Spezialfalles:

$$l = l', \quad m = m', \quad n = n',$$

für welchen auch hier

$$(34') \quad M = 0$$

ist.

Für die Bedeutung der einzelnen Zeichen sei auf die kursiv gedruckte Vorschrift am Ende des vorigen Paragraphen verwiesen.

§ 5. Allgemeine Resultate über den Einfluß der Wärmebewegung.

Das erste was an dem Ausdruck von M sowohl in (30) wie in (34) auffällt, ist die Unabhängigkeit von den Größen

l, m, n, l', m', n' . Ein Einfluß der gegenseitigen Lage der Atome, deren Verschiebungen u, v, w und u', v', w' in dem Ausdruck vorkamen, durch dessen Mitteilung M erhalten wurde, ist demnach nicht mehr vorhanden. Daraus folgt das schon früher auf Grund einer elementaren Theorie erhaltene Resultat:

Die Wärmebewegung hat keinen Einfluß auf die Schärfe der Interferenzpunkte.

Die Intensität der sekundären Röntgenstrahlung wird nämlich durch die im § 1, Formel (3) angegebene Doppelsumme bestimmt. Achtet man nun auf die Ausnahmewerte (30') oder (34') für M , dann kann derselbe berechnet werden, indem man zunächst aus der Doppelsumme alle diejenigen Glieder herausnimmt, für welche

$$l = l', m = m', n = n'$$

ist. Dieselben geben insgesamt den Beitrag

$$\frac{A^2}{r^2} \sum 1 = \frac{A^2}{r^2} N.$$

Nun subtrahiere man von der Doppelsumme alle diese Glieder, jedes mit e^M multipliziert, zum Gesamtbetrag

$$\frac{A^2}{r^2} N e^M$$

und addiere schließlich dasselbe. Was dann von der Doppelsumme, nach dieser Addition, noch zu berücksichtigen ist, kann in der Form

$$\frac{A^2}{r^2} e^M \sum_{l, m, n, l', m', n'} e^{i \kappa [(a - a_0)(x_0 - x_0') + (\beta - \beta_0)(y_0 - y_0') + (\gamma - \gamma_0)(z_0 - z_0')]} \quad (30)$$

geschrieben werden, wobei M jetzt durchweg durch (30) oder (34) bestimmt wird wegen der Unabhängigkeit von l, m, n, l', m', n' außerhalb der Summenzeichen gebracht werden kann und nunmehr die Summation über alle Werte von l, m, n, l', m', n' zu erstrecken ist. Die zuletzt angegebene Doppelsumme ist dieselbe, welche in der Laueschen Theorie auftritt, sie bestimmt die Lage der Interferenzpunkte in bekannter Weise. Setzen wir nun abkürzend

$$(35) \quad Z = N(1 - e^M)$$

und

$$(36) \quad L = \sum \sum e^{i \kappa [(a - a_0)(x_0 - x_0') + (\beta - \beta_0)(y_0 - y_0') + (\gamma - \gamma_0)(z_0 - z_0')]} \quad (34)$$

dann läßt sich die gesuchte Intensität J_m aus Z im L zusammenstellen in der Form:

$$(37) \quad J_m = \frac{A^2}{r^2} (Z + e^M L),$$

wonach der vorangestellte Satz ohne weiteres klar ist.

Dagegen kann andererseits behauptet werden:

Die Wärmebewegung übt einen wesentlichen Einfluß auf die Intensität der sekundären Strahlung.

Die Größe M , welche die Temperatur T als Parameter enthält, ist nach (30) oder (34) stets negativ. Außerdem wächst der absolute Betrag derselben, wie man ohne weiteres sieht, mit T über alle Grenzen. Für $\lim T = \infty$ wird demnach $e^M = 0$ und erhält man für die Intensität den Ausdruck:

$$J_m = \frac{A^2}{r^2} Z = N \frac{A^2}{r^2}.$$

In dieser Grenze bleibt also von der ganzen Erscheinung nur mehr eine gleichmäßig zerstreute Intensität übrig. Andererseits wird wenigstens dann, wenn keine Nullpunktsenergie existiert, für $T = 0$, auch $M = 0$ und demnach

$$J_m = \frac{A^2}{r^2} L.$$

Für diesen Grenzfall wird also die Intensitätsverteilung durch den Laueschen Ausdruck genau dargestellt.

Bei mittleren Temperaturen und auch dann noch für $T = 0$, wenn eine Nullpunktsenergie existiert sind die beiden Glieder der Klammer (37) zu berücksichtigen. Die Formel zeigt, wie die Wärmebewegung der durch L gemessenen Interferenzintensität Energie wegnimmt und dieselbe in eine durch Z gemessene zerstreute Energie umsetzt.

In sehr einfacher Weise ist die den Temperaturinfluß messende Größe M von der Wellenlänge abhängig. Da nämlich sowohl in (30) wie in (34) α^2 nur als Faktor auftritt, ist M durchweg umgekehrt proportional der Wellenlänge der sekundären Röntgenstrahlung. Beachtet man nur diese Abhängigkeit und beobachtet bei konstanter Temperatur und fester Richtung von Einfallsstrahl und Sekundärstrahl, dann ist demnach die Interferenzintensität proportional

$$e^{-\frac{\text{const}}{\lambda^2} L}$$

und die zerstreute Intensität proportional

$$1 - e^{-\frac{\text{const}}{\lambda^2}}.$$

Was schließlich die Abhängigkeit von Einfallrichtung und Beobachtungsrichtung abhängt, darüber zeigt (30) oder (34) sofort, daß M eine quadratische Funktion der Differenzen $(\alpha - \alpha_0)$, $(\beta - \beta_0)$, $(\gamma - \gamma_0)$ ist, deren Koeffizienten absolut genommen mit steigender Temperatur stets zunehmen. Man kann indessen leicht einsehen, daß diese quadratische Funktion nicht die allgemeinste mögliche Form hat; tatsächlich kommen in ihr nur die Quadrate der obigen Differenzen und nicht die Produkte derselben vor. Betrachtet man z. B. das mit $(\alpha - \alpha_0)$ $(\beta - \beta_0)$ multiplizierte Glied von $-M$ in (30), dann hat der zugehörige Koeffizient den Wert:

$$(38) \quad S \sum_k \frac{x^2}{\mu \omega_k^2} \cdot \frac{\frac{h \omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{h \omega_k}{2\pi k T}} - 1} \mathfrak{A}_k \mathfrak{B}_k.$$

Nun ist einerseits ω_k nach § 2 zu bestimmen als Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$\begin{vmatrix} A - \mu \omega_k^2 & F & E \\ F & B - \mu \omega_k^2 & D \\ E & D & C - \mu \omega_k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die darin vorkommenden Koeffizienten $A \dots F$ kann man z. B. durch (7) bestimmt denken, dann sieht man leicht, daß eine Zeichenumkehr von irgendeiner der Größen φ , ψ oder χ die Determinante nicht ändert.¹⁾ Hat man also in einem Oktanten des φ -, ψ -, χ -Raumes einen bestimmten Punkt gewählt und dafür eine Wurzel ω_k berechnet, dann ist dieselbe auch eine Wurzel der vorgelegten Determinante für die sieben in den sieben übrigen Oktanten des Phasenwürfels vorhandenen, durch fortgesetzte Spiegelung aus den Koordinatenebenen entstehenden Punkten. Die Werte der Wurzeln ω_k wiederholen sich also in jedem der acht Oktanten, dasselbe gilt also auch für den in (38) vorkommenden Ausdruck:

1) Die Symmetrieeigenschaften, welche wir hier benutzen, bleiben auch im Falle des allgemeinen Ansatzes für die Koeffizienten $A \dots F$ erhalten.

$$\frac{\omega^2}{\mu \omega_k^2} \frac{\frac{h \omega_k}{2 \pi}}{\frac{h \omega_k}{2 \pi k T} - 1}.$$

Andererseits folgen nach Bestimmung von ω_k die Verhältnisse $\mathfrak{A}_k : \mathfrak{B}_k : \mathfrak{C}_k$ aus (6) in der Form:

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_k : \mathfrak{B}_k : \mathfrak{C}_k = \begin{vmatrix} B - \mu \omega_k^2 & D \\ D & C - \mu \omega_k^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} D & F \\ C - \mu \omega_k^2 E & E \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F B - \mu \omega_k^2 \\ E \\ D \end{vmatrix} \\ = \mathcal{A}_k : \mathcal{A}'_k : \mathcal{A}''_k \end{array} \right.$$

Mit Rücksicht auf die Normierungsgleichungen (14) wird also

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathcal{A}_k}{\sqrt{\mathcal{A}_k^2 + \mathcal{A}'_k^2 + \mathcal{A}''_k^2}}, \quad \mathfrak{B}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathcal{A}'_k}{\sqrt{\mathcal{A}_k^2 + \mathcal{A}'_k^2 + \mathcal{A}''_k^2}}, \\ \mathfrak{C}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathcal{A}''_k}{\sqrt{\mathcal{A}_k^2 + \mathcal{A}'_k^2 + \mathcal{A}''_k^2}}. \end{array} \right.$$

Die Determinante \mathcal{A}_k ändert sich nicht bei einer Vorzeichenänderung der Phasen φ , ψ oder χ . Dagegen ändert \mathcal{A}'_k ihr Zeichen bei einer Vorzeichenänderung von φ oder ψ und \mathcal{A}''_k reagiert in derselben Weise bei einer Vorzeichenänderung von φ oder χ , während diese Änderungen an χ im ersten Falle, an ψ im zweiten Falle ohne Einfluß bleiben. Daraus folgt, daß jede der Kombinationen $\mathcal{A}_k \mathcal{A}'_k$, $\mathcal{A}'_k \mathcal{A}''_k$, $\mathcal{A}''_k \mathcal{A}_k$ stets in 4 der 8 Oktanten mit demselben Zeichen und in den anderen vier mit entgegengesetztem Zeichen vorkommt. Bei der durch \mathfrak{S} ausgedrückten Summation müssen also sowohl der Faktor von $(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)$ wie die Faktoren von $(\beta - \beta_0)(\gamma - \gamma_0)$ und von $(\gamma - \gamma_0)(\alpha - \alpha_0)$ verschwinden. Es ist klar, daß daselbe auch für (34) gilt.

Eine anschauliche Vorstellung über die räumliche Verteilung des Temperatureffektes gewinnt man folgendermaßen. Man zeichne in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem, dessen Achsen den Kanten des Elementarparallelopipeds parallel laufen einen Punkt mit den Koordinaten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Da diese Größen die Richtungscos. des Einfallstrahles bedeuten, ist

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$$

und liegt also dieser Punkt auf der Einheitskugel dort wo der durch den Nullpunkt gelegte einfallende Strahl dieselbe schneidet. Nun ist der Temperatureinfluß (räumlich) konstant, wenn M ,

d. h. wenn die Summe (30), resp. (34), konstant ist. Mit Rück-
sicht auf die obigen Überlegungen kann man diese Bedingung
schreiben:

$$(41) \quad K_{11}(\alpha - \alpha_0)^2 + K_{22}(\beta - \beta_0)^2 + K_{33}(\gamma - \gamma_0)^2 = \text{const.}$$

Zeichnet man nun die bei stetig veränderlichem rechten
Gliede durch diese Gleichung dargestellte Schar von Ellip-
soiden um den Punkt $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ als
Mittelpunkt, dann liegen die Achsen
derselben in Richtung der Koordinaten-
achsen und haben Längen proportional
 $K_{11}^{-1/2}, K_{22}^{-1/2}, K_{33}^{-1/2}$, welche nur mehr
Funktion von Temperatur und Wellen-
länge sind. Die Schnittlinien dieser
Flächenschar mit der Einheitskugel
sind die Kurven, auf denen der Tem-
peratureffekt konstant ist. In der

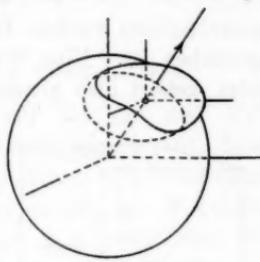


Fig. 1.

Fig. 1 ist ein solches Ellipsoid und die zugehörige Schnittlinie
schematisch gezeichnet.

Viel einfacher wird das Verhalten für reguläre Kristalle, dann geht das Ellipsoid, von dem eben die Rede war, über in eine Kugel, so daß die Kurven konstanten Temperatureinflusses Kreise werden. Dieselben liegen in Ebenen senkrecht zum Einfallstrahl und haben ihren Mittelpunkt auf dieser Linie. Nur dieser Spezialfall wurde in der früheren angenäherten Theorie berücksichtigt.

Daß letztere Aussage zu Recht besteht, sieht man folgen-
dermaßen. Im Falle des regulären Kristalles können die
Gleichungen (7) als Definitionsgleichungen für die Größen
 $A \dots F$ angesehen werden. Denkt man sich nun diese Werte
in (6) eingesetzt, dann haben letztere Gleichungen die Eigen-
schaft, daß 1. die Determinante des Gleichungssystems bei
zyklischer Vertauschung von φ, ψ, χ unverändert bleibt und
2. die Gleichungen selbst sich nicht ändern, wenn gleichzeitig
 φ, ψ, χ unter sich und A, B, C unter sich zyklisch vertauscht
werden.

Nach dem Früheren ist es nur nötig einen Oktanten des
Phasenwürfels genauer zu betrachten, wir wählen dafür den-

jenigen in dem φ, ψ, χ positiv sind. Nun wählen wir einen beliebigen Punkt

$$\varphi = \varphi, \quad \psi = \psi, \quad \chi = \chi$$

in demselben, dann können sofort die zwei weiteren Punkte

$$\varphi' = \psi, \quad \psi' = \chi, \quad \chi' = \varphi$$

und

$$\varphi' = \chi, \quad \psi' = \varphi, \quad \chi' = \psi$$

eingezeichnet werden, für welche die Determinante unverändert geblieben ist. Eine Wurzel ω_k , welche zum ersten Punkt gehört, gehört also gleichzeitig zu allen drei Punkten. In Fig. 2

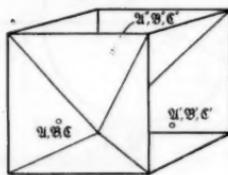


Fig. 2.

haben wir diese drei Punkte eingezeichnet; außerdem haben wir den einen Oktanten des Phasenwürfels durch drei durch den Nullpunkt und je durch eine Kante des Würfels gehende Ebenen so in drei Pyramiden eingeteilt, daß bei der obigen zyklischen Vertauschung die Gesamtheit der Punkte einer Pyramide in die Gesamtheit der Punkte der folgenden übergeht.

Zu jedem der drei obengenannten Punkte gehören nach Annahme einer bestimmten Schwingungszahl ω_k drei Werte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, welche wir resp. mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}; \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'; \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''$ bezeichnet haben. In den Ausdrücken (30) oder (34) hat man nun, sofern man vorläufig nur diese drei Punkte in Betracht zieht, die Ausdrücke

$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{A}''^2, \quad \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{B}''^2, \quad \mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}'^2 + \mathfrak{C}''^2$ zu bilden. Mit Rücksicht auf die oben unter 2. genannte Eigenschaft der Gleichungen (6) ist aber

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C},$$

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C}' = \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{B}'' = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C}'' = \mathfrak{B},$$

so daß die drei Summen denselben gemeinschaftlichen Wert

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$$

haben. Nimmt man nun immer bei der in (30) und (34) durch \mathfrak{S} bezeichneten Summation drei durch zyklische Vertauschung miteinander zusammenhängende Punkte des Phasenraums zusammen, so folgt also ohne weiteres die Gleichheit der Koeffi-

zienten von $(\alpha - \alpha_0)^2$, $(\beta - \beta_0)^2$ und $(\gamma - \gamma_0)^2$, womit die vorangestellte Behauptung bewiesen ist.

Mit dem Obigen dürfte das, was sich ohne eingehendere Bearbeitung von (30) oder (34) über den Temperatureinfluß aussagen läßt, im wesentlichen erschöpft sein. Wir gehen im nächsten Paragraphen dazu über, die Form der Temperaturabhängigkeit genauer zu diskutieren, und zwar zunächst für tiefe Temperaturen.

§ 6. Der Wärmeinfluß bei tiefen Temperaturen.

Beschränken wir uns zunächst auf die für den Fall fehlender Nullpunktsenergie berechneten Gleichung (30), dann können wir vor allem die Summation \mathbb{S} durch eine Integration über den Phasenwürfel ersetzen. Zu einem der N -Punkte dieses Würfels, worüber die Summation \mathbb{S} zu erstrecken ist, gehört ein Volumenelement vom Inhalte

$$\frac{(2\pi)^3}{N},$$

wofür im Lim. für $N = \infty$ auch $d\varphi d\psi d\chi$ geschrieben werden kann. Deshalb kann (30) auf die Form gebracht werden:

$$(42) \quad \left\{ -M = \frac{N}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi d\psi d\chi \sum_k \frac{\pi^3}{2\mu \omega_k^2} \frac{\frac{h\omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{h\omega_k}{2\pi kT}} - 1} [(\alpha - \alpha_0)^2 \mathfrak{A}_k^2 + (\beta - \beta_0)^2 \mathfrak{B}_k^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 \mathfrak{C}_k^2], \right.$$

wenn wir noch das Resultat des vorigen Paragraphen benutzen, wonach die Produkte $(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0)$ usw. aus dem Endresultat verschwinden.

Für tiefe Temperaturen liefern die Teile des Phasenwürfels, zu denen hohe Schwingungszahlen ω_k gehören, keinen nennenswerten Beitrag mehr zu dem Werte von M ; in diesem Spezialfalle dürfen wir uns also in Strenge beschränken auf lange Wellen, für welche die elastischen Koeffizienten durch (7) mit genügender Genauigkeit dargestellt werden. Eine wesentliche Vereinfachung, welche dadurch erzielt wird, besteht darin, daß nun bekanntlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Wellen unabhängig von der Schwingungs-

zahl ist. Setzt man die zu ω_k gehörige Geschwindigkeit g_k und die Wellenlänge gleich λ , dann ist

$$(43) \quad \omega_k = \frac{2\pi g_k}{\lambda}.$$

Nennt man andererseits die Richtungen der Normale zu den Ebenen konstanter Phase p, q, r , so daß

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

ist, dann kann man für φ, ψ, χ substituieren

$$(44) \quad \varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} p, \quad \psi = \frac{2\pi b}{\lambda} q, \quad \chi = \frac{2\pi c}{\lambda} r,$$

wobei a, b, c die schon in § 2 eingeführten Längen des elementaren Kristallparallelolopipeds bedeuten.

An Stelle der Berechnung von ω_k als Funktion von φ, ψ, χ tritt jetzt die Berechnung von g_k als Funktion von p, q, r . Setzt man nämlich in (6) die Werte (43) und (44) ein, dann folgt für g die Gleichung:

$$(45) \quad \begin{vmatrix} A_0 - \varrho g^2 & F_0 & E_0 \\ F_0 & B_0 - \varrho g^2 & D_0 \\ E_0 & D_0 & C_0 - \varrho g^2 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei $A_0 \dots F_0$ nach (7) Abkürzungen sind für die folgenden Richtungsfunktionen:

$$(46) \quad \begin{cases} A_0 = c_{11} p^2 + c_{66} q^2 + c_{55} r^2, & D_0 = (c_{33} + c_{44}) q r, \\ B_0 = c_{22} q^2 + c_{44} r^2 + c_{66} p^2, & E_0 = (c_{31} + c_{55}) r p, \\ C_0 = c_{33} r^2 + c_{55} p^2 + c_{44} q^2, & F_0 = (c_{12} + c_{66}) p q. \end{cases}$$

Die Gleichung (45) hat drei Wurzeln, von denen eine beliebige oben mit g_k bezeichnet wurde; der Buchstabe ϱ bedeutet die Dichte, welche ursprünglich in der Form $\mu/a b c$ auftritt.

Nach Wahl eines bestimmten Wertes g_k ergeben sich die Größen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{C}_k$ aus den drei zu (45) gehörigen linearen Gleichungen

$$(47) \quad \begin{cases} A_0 \mathfrak{A}_k + F_0 \mathfrak{B}_k + E_0 \mathfrak{C}_k = \varrho g_k^2 \mathfrak{A}_k, \\ F_0 \mathfrak{A}_k + B_0 \mathfrak{B}_k + D_0 \mathfrak{C}_k = \varrho g_k^2 \mathfrak{B}_k, \\ E_0 \mathfrak{A}_k + D_0 \mathfrak{B}_k + C_0 \mathfrak{C}_k = \varrho g_k^2 \mathfrak{C}_k, \end{cases}$$

mit der Nebenbedingung:

$$(47') \quad \mathfrak{A}_k^2 + \mathfrak{B}_k^2 + \mathfrak{C}_k^2 = \frac{1}{N}.$$

Im Exponenten der Exponentialfunktion in (42) steht die Größe

$$(48) \quad \frac{\hbar \omega_k}{2\pi k T} = \frac{\hbar g_k}{\lambda k T} = \xi;$$

diese und die zwei Koordinaten der Einheitskugel

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

seien als neue Variablen eingeführt an Stelle von φ, ψ, χ . Dann berechnet man leicht für die Größe des Volumenelementes des Phasenraumes in diesen neuen Koordinaten den Wert:

$$\left(\frac{2\pi k T}{\hbar g_k} \right)^3 a b c \xi^2 d\xi d\Omega,$$

wenn $d\Omega$ ein Flächenelement der Einheitskugel bedeutet.

Führt man diesen Wert in (42) ein, dann entsteht nach einiger Reduktion der Ausdruck:

$$(45) \quad \left\{ -M = \frac{N}{8\pi^2} \frac{\pi^2 k^2 T^2}{\hbar q} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} \cdot \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3} [(\alpha - \alpha_0)^2 \mathfrak{A}_k^2 + (\beta - \beta_0)^2 \mathfrak{B}_k^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 \mathfrak{C}_k^2]. \right.$$

Da wir uns auf tiefe Temperaturen beschränken, konnte einerseits die Integration nach ξ von 0 bis ∞ erstreckt werden, andererseits sind nach (47) die Größen $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{C}_k$ nur von den Koordinaten auf der Einheitskugel und nicht von ξ abhängig; wir waren demnach berechtigt, das Integral nach ξ als Faktor vor der Summe zu bringen. Bekanntlich ist

$$\int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

und kann also an Stelle von (45) auch geschrieben werden

$$(45') \quad \left\{ -M = \frac{N}{48} \frac{\pi^2 k^2 T^2}{\hbar q} \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3} [(\alpha - \alpha_0)^2 \mathfrak{A}_k^2 + (\beta - \beta_0)^2 \mathfrak{B}_k^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 \mathfrak{C}_k^2]. \right.$$

Hieraus folgt das Resultat:

Bei tiefen Temperaturen wird bei Abwesenheit einer Nullpunktsenergie der Exponent der Exponentialfunktion, welche den Wärmeeinfluss mißt, proportional T^2 .

Der Faktor von T^2 ist im allgemeinen eine quadratische Funktion von $(\alpha - \alpha_0), (\beta - \beta_0), (\gamma - \gamma_0)$, deren Koeffizienten

nach (45') berechnet werden können als Summe über $k = 1, 2, 3$ der Mittelwerte:

$$\int \frac{\mathfrak{A}_k^2}{g_k^3} d\Omega, \quad \int \frac{\mathfrak{B}_k^2}{g_k^3} d\Omega, \quad \int \frac{\mathfrak{C}_k^2}{g_k^3} d\Omega,$$

welche im allgemeinen voneinander verschieden ausfallen.

Beim regulären Kristall dagegen wurde oben gezeigt, daß diese Mittelwerte einander gleich sein müssen. Jeder derselben kann deshalb auf die Form gebracht werden:

$$\frac{1}{3} \int \frac{\mathfrak{A}_k^2 + \mathfrak{B}_k^2 + \mathfrak{C}_k^2}{g_k^3} d\Omega,$$

was mit Rücksicht auf (14) auch einfach gleich

$$\frac{1}{3N} \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3}$$

gesetzt werden kann. An Stelle von (45') bekommt man jetzt für M den Wert:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M = \frac{1}{144} \frac{\pi^2 k^2 T^2}{h \varrho} [(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 \\ \quad + (\gamma - \gamma_0)^2] \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3}, \end{array} \right.$$

was noch unter Einführung des Winkels ϑ zwischen Beobachtungs- und Einfallrichtung auf die einfache Form

$$(46') \quad -M = \frac{1}{72} \frac{\pi^2 k^2 T^2}{h \varrho} (1 - \cos \vartheta) \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3}$$

gebracht werden kann; ein Ausdruck, dessen Bau natürlich in Übereinstimmung ist mit der am Ende des vorhergehenden Paragraphen angegebenen Konstruktion. Die Summe \sum_k ist dieselbe, welche auch bei der Theorie der spezifischen Wärme für tiefe Temperaturen auftritt. Nach der von Born und v. Kármán¹⁾ ausgeführten Berechnung des Faktors in dem T^3 -Gesetz für reguläre Kristalle hat man

$$(47) \quad C = \frac{4\pi^4}{15} \frac{k^4 T^3}{\varrho h^3} \sum_k \int \frac{d\Omega}{g_k^3},$$

wenn C die spezifische Wärme (Wärmemenge pro Gramm) bedeutet. Durch Kombination der beiden Formeln (46') und (47) findet man schließlich

1) Born und v. Kármán, Physik. Ztschr. 14. p. 15. 1913.

$$(48) \quad -M = \frac{5}{96\pi^4} \frac{\pi^2 h^3}{k^2} \frac{C}{T} (1 - \cos \vartheta),$$

woraus nun ohne Berücksichtigung elastischer Messungen der Temperatureinfluß bei tiefen Temperaturen aus der beobachteten spezifischen Wärme zu berechnen ist.

Wie (48) unter Beobachtung des T^3 -Gesetzes für die spezifische Wärme noch einmal deutlich zeigt, verschwindet M und damit der Temperatureinfluß für tiefe Temperaturen vollständig, wenn keine Nullpunktsenergie existiert. Die im vorigen Paragraphen durch Z charakterisierte zerstreute Strahlung verschwindet bei $T = 0$ für alle Beobachtungsrichtungen, während ein Abnehmen der Interferenzintensität mit zunehmendem Winkelabstand ϑ zwischen Beobachtungs- und Einfallsrichtung nicht mehr exponentiell stattfindet. Ein anderes Bild erhalten wir, wenn die Nullpunktsenergie vorhanden ist. In diesem Falle gilt für M nicht mehr Gleichung (30), sondern Gleichung (34), M ist also gegenüber dem oben angegebenen Wert bei allen Temperaturen um den von der Temperatur unabhängigen Betrag:

$$(49) \quad \left\{ \Delta M = S \sum_k \frac{\pi^2}{4\mu \omega_k^2} \frac{h \omega_k}{2\pi} [(\alpha - \alpha_0)^2 \mathfrak{A}_k^2 + (\beta - \beta_0)^2 \mathfrak{B}_k^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 \mathfrak{C}_k^2] \right.$$

größer, ein Ausdruck, der ähnlich wie oben auch geschrieben werden kann:

$$(49') \quad \left\{ \Delta M = \frac{1}{4} \frac{N}{(2\pi)^3} \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k \frac{\pi^2}{\mu \omega_k^2} \frac{h \omega_k}{2\pi} [(\alpha - \alpha_0)^2 \mathfrak{A}_k^2 + (\beta - \beta_0)^2 \mathfrak{B}_k^2 + (\gamma - \gamma_0)^2 \mathfrak{C}_k^2]. \right.$$

Die Rechnung, welche man auszuführen hat, um den Wert von ΔM aus (49') zu finden, ist natürlich vollständig bestimmt. Man hat zu jedem Punkt φ, ψ, χ des Phasenraumes die drei Wurzeln ω_k und die zugehörigen Konstanten $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \mathfrak{C}_k$ aus den Gleichungen (6) zu berechnen und dann die Integration über den Phasenraum auszuführen. Das ist nun in Strenge nicht allein sehr umständlich, sondern nicht einmal zahlenmäßig durchzuführen, weil dazu die Größen $A \dots F$ in (7) als Funktionen von φ, ψ, χ genauer bekannt sein müßten als das durch elastische Messungen überhaupt erreichbar ist. Wesentlich ist dabei vor allen Dingen, daß in (49') jetzt nicht

mehr wie bei den früheren Rechnungen dieses Paragraphen der Einfluß der hohen Schwingungszahlen durch eine Plancksche Funktion neutralisiert wird. Indessen wir brauchen durchaus eine Zahlenangabe über den für die Frage nach der Nullpunktsenergie ganz wesentlichen Wert von ΔM , deshalb möge es gestattet sein, das Annäherungsverfahren, das sich bei der Berechnung der spezifischen Wärme bewährt hat, auch hier anzuwenden.

Beschränken wir uns auf den regulären Kristall, dann fanden wir früher schon ganz allgemein, daß die in (49) auftretenden Faktoren von $(\alpha - \alpha_0)^2$, $(\beta - \beta_0)^2$, $(\gamma - \gamma_0)^2$ untereinander gleich sind. Für jeden dieser Faktoren können wir demnach schreiben:

$$\frac{1}{12} \frac{N}{(2\pi)^3} \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k \frac{x^2}{\mu \omega_k^2} \frac{\hbar \omega_k}{2\pi} (\mathfrak{A}_k^2 + \mathfrak{B}_k^2 + \mathfrak{C}_k^2).$$

Mit Rücksicht auf (14) wird also unter Einführung des oben schon benutzten Winkels ϑ :

$$(50) \quad \Delta M = \frac{1}{96\pi^4} (1 - \cos \vartheta) \iiint d\varphi d\psi d\chi \sum_k \frac{x^2 \hbar}{\mu \omega_k}$$

oder auch

$$(50') \quad \Delta M = \frac{1}{96\pi^4} (1 - \cos \vartheta) \frac{x^2 \hbar}{\mu} \sum_k \iiint \frac{d\varphi d\psi d\chi}{\omega_k}.$$

Bis hierher ist die Rechnung noch streng richtig, jetzt führen wir an Stelle von φ, ψ, χ die neuen Variablen ω_k und zwei Winkel der Einheitskugel ein, dann kann für $d\varphi d\psi d\chi$ nach (44) substituiert werden:

$$\frac{a^3}{g_k^3} \omega^3 d\omega d\Omega,$$

wenn $d\Omega$ das Element des räumlichen Winkels bedeutet und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit g_k näherungsweise als von der Schwingungszahl und der Fortpflanzungsrichtung unabhängig angesehen wird. Dann nehmen wir wie in der Theorie der spezifischen Wärme für ω einen Maximalwert ω_{\max} an und tun so, als ob wir von $\omega = 0$ bis ω_{\max} über das Innere einer Kugel zu integrieren haben¹⁾, so wird

1) In dieser Weise wurde von M. Born und Th. v. Kármán (Physik. Ztschr. 14. p. 15. 1913) der Übergang von ihrer Theorie zu der von mir abgeleiteten Formel für die spezifische Wärme bewerkstelligt.

$$(51) \quad \Delta M = \frac{1}{48\pi^3} (1 - \cos \vartheta) \frac{x^2 h}{\varrho} \omega_{\max}^2 \sum \frac{1}{g_k^3}.$$

Beim isotropen Körper, bei dem wenigstens die Unabhängigkeit von g_k von der Fortpflanzungsrichtung gewährleistet ist, kann dann die Summe berechnet werden in der Form:

$$\sum \frac{1}{g_k^3} = \frac{1}{g_l^3} + \frac{2}{g_t^3},$$

mittels der beobachteten oder berechneten Fortpflanzungsgeschwindigkeit g_l der Longitudinal- und g_t der Transversalwellen. Statt dessen kann man auch (51) zurückführen auf die früher¹⁾ eingeführte charakteristische Temperatur:

$$(52) \quad \Theta = \frac{\hbar \omega_{\max}}{2\pi k}.$$

An der betreffenden Stelle wurde gezeigt, daß für ein Volumen V mit der Atomzahl N die Beziehung besteht

$$(52') \quad 3N = \frac{V}{6\pi^2} \omega_{\max}^3 \left(\frac{1}{g_l^3} + \frac{2}{g_t^3} \right) = \frac{V}{6\pi^2} \omega_{\max}^3 \sum \frac{1}{g_k^3},$$

so daß man unter Einführung des einem Atom zukommenden Volumens V/N und der eben erwähnten charakteristischen Temperatur an Stelle von (51) erhält:

$$(53) \quad \Delta M = \frac{3}{16\pi^2} (1 - \cos \vartheta) \frac{N}{V} \frac{x^2 h^2}{\varrho k} \frac{1}{\Theta}.$$

Unter Einführung der Avogadroschen Zahl N (Anzahl der Atome pro Atomgewicht) und des Atomgewichtes ϱ kann man schließlich bei einatomigen Körpern geradesogut schreiben

$$(53') \quad \Delta M = \frac{3}{16\pi^2} \frac{x^2 h^2}{k} \frac{N}{\varrho \Theta} (1 - \cos \vartheta).$$

Während bei Abwesenheit der Nullpunktsenergie der Temperatureffekt für $T = 0$ verschwindet, wird im entgegengesetzten Falle die Temperaturfunktion konvergieren nach $e^{-\Delta M}$, ein Wert, der sich experimentell unter Umständen recht erheblich bemerkbar machen muß, wie die numerische Diskussion im § 8 zeigt.

§ 7. Angenäherte Formel für die Temperaturfunktion im ganzen Temperaturgebiet.

Wie das von der Theorie der spezifischen Wärmem bekannt ist und es auch der vorige Paragraph für unseren Fall wiederum

1) P. Debye, loc. cit.

zeigt, werden die strengen Rechnungen schließlich unausführbar. Nun hat andererseits die Nachprüfung meiner angenäherten Theorie der spezifischen Wärme ergeben, daß bei einatomigen Körpern und solchen, welche wie z. B. KCl ebenso zu behandeln sind nur minimale Differenzen zwischen dem theoretischen und experimentellen Verlauf der Kurven: spezifische Wärme als Funktion der Temperatur, vorhanden sind. Es liegt deshalb nahe, für dieselben Fälle auch hier eine möglichst einfache Näherungsformel zu entwickeln, welche möglichst genau die experimentellen Erscheinungen beschreibt. Dieses Ziel werden wir im folgenden zu erreichen suchen, man wird die Formel als Wegweiser benutzen können für die Experimente, welche auf diesem Gebiete noch alle erst ausgeführt werden müssen. Der Kristall, auf den wir unsere Rechnung beziehen wollen, sei regulär, außerdem werde zunächst von einer Nullpunktsenergie abgesehen. Für diesen Fall kann mit Rücksicht auf das am Ende des § 5 erhaltene allgemeine Resultat unter Hinzuziehung von (14) für M nach (42) geschrieben werden:

$$(54) - M = \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^3} (1 - \cos \vartheta) \sum_k \iiint d\varphi d\psi d\chi \frac{x^3}{\mu \omega_k^2} \frac{\frac{h \omega_k}{2\pi}}{e^{\frac{h \omega_k}{2\pi k T}} - 1},$$

wenn wir wieder wie in § 6 den Winkel ϑ , zwischen Beobachtungsrichtung und Einfallrichtung einführen. Nun sehe man näherungsweise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit g_k als konstant an und führe dann unter Benutzung von (43) und (44) an Stelle von φ, ψ, χ die neuen Variablen

$$(55) \quad \xi = \frac{h \omega_k}{2\pi k T}$$

und zwei Koordinaten auf der Einheitskugel ein. Dann erhält man statt (54) unter Benutzung der im § 6 benutzten Bezeichnungen:

$$- M = \frac{1}{12\pi^2} (1 - \cos \vartheta) \frac{x^3 k^2 T^2}{h \varrho} \sum_k \iiint \frac{\xi d\xi}{e^{\xi} - 1} \frac{d\Omega}{g_k^3}.$$

Schließlich erstrecke man die Integration nach ξ von 0 bis zu *einem* Maximalwert x , der der maximalen Grenzschwingungszahl des elastischen Spektrums entspricht und für den wir Θ/T schreiben unter Einführung der obengenannten charakteristischen Temperatur Θ . Andererseits berechne man

das Integral über die Einheitskugel, so wie das einem isotropen Körper entsprechen würde, bei welchem

$$\iint \frac{d\Omega}{g_i^3} = 4\pi \left(\frac{1}{g_i^3} + \frac{2}{g_i^3} \right)$$

ist. Dann findet man für M den Ausdruck

$$(56) \quad -M = \frac{1}{3\pi} (1 - \cos \vartheta) \frac{x^2 k^3 T^3}{h q} \left(\frac{1}{g_i^3} + \frac{2}{g_i^3} \right) \int_0^{\frac{x}{T}} \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Die Summe der reciproken dritten Potenzen der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kann ebenfalls nach (52) und (52') in Θ ausgedrückt werden; tut man das, dann kann man an Stelle von (56) auch schreiben:

$$(56') \quad -M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{x^2 h^2}{\mu k \Theta} (1 - \cos \vartheta) \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1},$$

wenn μ die Masse eines Atoms der betreffenden Substanz bedeutet. Unter Einführung der Anzahl Atome pro Atomgewicht N und des Atomgewichtes A kann man (56') auch die Form geben:

$$(56'') \quad -M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{x^2 h^2}{k} \frac{N}{A \Theta} (1 - \cos \vartheta) \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1}.$$

Damit ist die gesuchte Darstellung von M für das ganze Temperaturgebiet gefunden.

Im nächsten Paragraphen werden wir eine eingehendere, numerische Diskussion an diese Formel anschließen, hier mögen nur die zwei Grenzfälle $T \ll \Theta$ und $T \gg \Theta$ eine besondere Erwähnung finden.

a) $T \ll \Theta$.

In diesem Falle ist $x = \Theta/T \gg 1$, die obere Grenze im Integral kann dann gleich ∞ gesetzt werden und man findet:

$$\int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} = \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} = \int_0^\infty \xi (e^{-\xi} + e^{-2\xi} + e^{-3\xi} + \dots) d\xi \\ = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ersetzt man nun noch $1/x^2$ durch T^2/Θ^2 , dann wird z. B. (56'):

$$(57) \quad -M = \frac{1}{8} \frac{x^2 h^2}{\mu k \Theta^2} (1 - \cos \vartheta) T^2.$$

Wir finden also das schon im § 6 für tiefe Temperaturen ausgesprochene Resultat wieder, wonach $-M$ proportional dem Quadrat der absoluten Temperatur wird.¹⁾

b) $T > > \Theta$.

In diesem Falle ist $x = \Theta/T < < 1$ und kann man das Integral in (56') näherungsweise berechnen zu

$$\int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} = \int_0^x \frac{\xi d\xi}{\xi} = x.$$

Damit wird (56'):

$$(58) \quad -M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{x^2 h^2}{\mu k \Theta^2} (1 - \cos \vartheta) T.$$

Dieselbe Temperaturabhängigkeit gab auch die frühere Näherungstheorie. Der einzige Unterschied besteht darin, daß wir jetzt nicht mehr eine nur angenähert bekannte „quasielastische Kraft“ f für das Atom einzuführen haben. Man kann das auch so ausdrücken: durch (58) werde die früher eingeführte quasielastische Kraft f bestimmt. In der Näherungstheorie fanden wir nämlich

$$-M = 2 \frac{x^2 k}{f} (1 - \cos \vartheta) T,$$

ein Vergleich mit (58) liefert also für f die Bestimmungsgleichung:

$$f = \frac{4\pi^2 \mu k^2 \Theta^2}{3 h^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Definition von Θ :

$$\Theta = \frac{h \nu_{\max}}{k}$$

mittels der Grenzschwingungszahl des elastischen Spektrums kann man auch noch schreiben

$$\frac{f}{\mu} = \frac{2}{3} 4\pi^2 \nu_{\max}^2$$

1) Die Identität mit (48) folgt sofort, wenn man für C den für tiefe Temperaturen gültigen Wert

$$C = \frac{12\pi^4}{5} \frac{k}{\mu} \frac{T^3}{\Theta^3}$$

substituiert.

und deshalb das Schlußresultat folgendermaßen aussprechen:

Die jetzige, verbesserte Theorie liefert im Grenzfall für hohe Temperaturen dasselbe Resultat, wie die frühere, ohne Rücksicht auf die gegenseitige Bindung der Atome, entworfene; als „Schwingungszahl der Atome“ hat man in letztere einen Wert einzusetzen, der $\sqrt{\frac{2}{3}}$ Mal der Schwingungszahl des elastischen Spektrums ist.

Der Fall, daß eine Nullpunktsenergie existiert, kann ohne weitere Rechnung erledigt werden; die Änderung ΔM , welche M durch die Berücksichtigung dieses Umstandes erfährt, wurde schon im vorigen Paragraphen berechnet. Mit Rücksicht auf (58) oder (58') findet man jetzt

$$(59) \quad -M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{x^2 h^3}{\mu k \Theta} (1 - \cos \vartheta) \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^{\xi} - 1} \right]$$

an Stelle von (56'), womit auch hier eine Darstellung für das ganze Temperaturgebiet erhalten ist. An dem obigen Satz ist nichts zu ändern, nur liegen die Temperaturen, welche als „hoch“ zu bezeichnen sind, erheblich höher, wie bei verschwindender Nullpunktsenergie.

§ 8. Numerische Diskussion und graphische Erläuterung.

Der Temperaturverlauf von M wird bestimmt durch das in (56') und (59) auftretende Integral. Wir schreiben dasselbe:

$$\frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^{\xi} - 1} = \frac{\Phi(x)}{x},$$

die Funktion $\Phi(x)$ hat dann die folgenden Entwickelungen:¹⁾

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x) = 1 - \frac{x}{4} + \frac{B_1}{3!} x^3 - \frac{B_3}{5!} x^5 + \frac{B_5}{7!} x^7 - + \dots \\ = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{36} - \frac{x^5}{3600} + \frac{x^7}{211680} - \frac{x^9}{10886400} + \dots \end{array} \right.$$

und

$$(60') \quad \Phi(x) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{x} - e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) - e^{-2x} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4x} \right) - e^{-3x} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9x} \right) - \dots,$$

1) $B_1, B_3, B_5 \dots$ — bedeuten die Bernoulli'schen Zahlen.

von denen (60) für kleine Werte und (60') für große Werte von x geeignet ist. Bricht man (60) beim dritten Gliede ab, dann ist der Fehler noch kleiner wie 1 Proz. für $x = 2$, dasselbe gilt für (60') von x wenig größer als 2 an. Die Reihen folgen ganz analog wie das für die in der Theorie der spezifischen Wärme auftretende Funktion früher gezeigt wurde. Mittels (60) und (60') wurde für $\Phi(x)$ die folgende Tabelle berechnet.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	1	1,2	0,740	3	0,483	9	0,183
0,2	0,951	1,4	0,704	4	0,388	10	0,164
0,4	0,904	1,6	0,669	5	0,321	12	0,137
0,6	0,860	1,8	0,637	6	0,271	14	0,114
0,8	0,818	2,0	0,607	7	0,234	16	0,103
1,0	0,778	2,5	0,540	8	0,205	20	0,0822

Für den Temperaturverlauf ist die Funktion Φ/x , resp. $\frac{1}{4} + \Phi/x$ maßgebend (vgl. (62) resp. (62')). Zur besseren Veran-

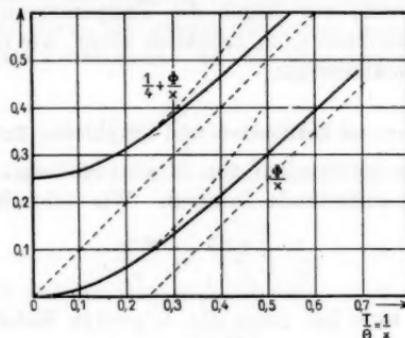


Fig. 3.

schaulichung haben wir in Fig. 3 die beiden Funktionen als Funktion von $1/x = T/\Theta$ aufgetragen. Sie liegen zwischen den beiden Näherungen

$$\frac{\Phi}{x} = \frac{\pi^2}{6} \frac{T^2}{\Theta^2} \quad \text{und} \quad \frac{\Phi}{x} = \frac{T}{\Theta} - \frac{1}{4},$$

resp.

$$\frac{1}{4} + \frac{\Phi}{x} = \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6} \frac{T^2}{\Theta^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} + \frac{\Phi}{x} = \frac{T}{\Theta},$$

welche ebenfalls, und zwar gestrichelt eingezeichnet wurden.

Man überzeugt sich leicht, daß die obige Näherungsgleichung für tiefere Temperaturen gilt bis $T/\Theta = \frac{1}{5}$, während die Näherungsgleichung für hohe Temperaturen gilt von $T/\Theta = 1,6$ an, mit einem Fehler von höchstens 1 Proz. Läßt man einen Fehler von 10 Proz. zu, dann erstrecken sich die Gültigkeitsbereiche von $T/\Theta = 0$ bis $T/\Theta = \frac{1}{5,5}$ und von $T/\Theta = \frac{1}{1,2}$ bis $T/\Theta = \infty$.

Die für die absolute Größe des Temperatureffektes bei der Interferenz von Röntgenstrahlen maßgebende reine Zahl sei P genannt, dann ist nach (56') oder (56'') und (59)

$$(61) \quad P = \frac{1}{4\pi^2 \mu k \Theta} \frac{x^2 h^3}{4\pi^2} \frac{N h^3}{k} \frac{x^2}{A \Theta},$$

wobei x das 2π -fache des reziproken Wertes der Wellenlänge der Röntgenstrahlen bedeutet, h und k die bekannten universellen Konstanten sind, Θ die für den Verlauf der spezifischen Wärme charakteristische Temperatur, μ die wirkliche Masse eines Atoms, A das übliche Atomgewicht und N die universelle Zahl der Atome pro Atomgewicht bedeutet. Führt man die Wellenlänge λ ein und setzt nach Planck: $N = 6,20 \cdot 10^{23}$, $k = 1,34 \cdot 10^{-16}$ erg, $h = 6,41 \cdot 10^{-27}$ erg sec., dann kann P auch berechnet werden aus der Beziehung:

$$(61') \quad P = \frac{0,571 \cdot 10^{-12}}{A \Theta \lambda^2},$$

in der λ in Zentimeter einzusetzen ist.

Der Exponent der Exponentialfunktion, welcher den Verlauf der Intensität regelt und den wir früher M nannten, kann geschrieben werden:

a) bei fehlender Nullpunktsenergie:

$$(62) \quad M = -P(1 - \cos \vartheta) \frac{\Phi(x)}{x},$$

b) bei Anwesenheit von Nullpunktsenergie:

$$(62') \quad M = -P(1 - \cos \vartheta) \left[\frac{1}{4} + \frac{\Phi(x)}{x} \right],$$

wobei P die eben definierte Zahl ist, Φ die Funktion von $x = \Theta/T$ bedeutet, mit deren Besprechung dieser Paragraph angefangen wurde und ϑ der Winkel ist zwischen Beobachtungs- und Einfallsrichtung.

Im Anschluß an § 5 erinnern wir daran, daß die zerstreute Intensität proportional ist

$$(63) \quad N(1 - e^M),$$

während die Interferenzintensität gemessen wird durch

$$(63') \quad e^M L,$$

wobei L der dort noch näher definierte Lauesche Ausdruck und N die Zahl der beleuchteten Atome bedeutet.

Als erstes Beispiel sei der Fall des Diamanten gewählt, dessen eigenartiges experimentelles Verhalten den Anstoß zu der Theorie gegeben hat. Hier ist $A = 12$ und $\Theta = 1830$; für $\lambda = 10^{-8}$ cm wird demnach (vgl. (61')):

$$P = 0,26,$$

für $\lambda = 5 \cdot 10^{-9}$ cm wäre P viermal so groß, also

$$P = 1,04.$$

Unter Benutzung der Tabelle von $\Phi(x)$ kann jetzt der Exponent der Temperaturfunktion M leicht nach (62) oder (62') berechnet werden für jede beliebige Temperatur T und einen beliebigen Winkel ϑ . Schließlich ergeben sich nach Berechnung von e^M die Ausdrücke (63) und (63'), welche den Verlauf von zerstreuter, resp. Interferenzintensität charakterisieren.

Die Rechnung wurde durchgeführt für zwei Wellenlängen $\lambda = 7,1 \cdot 10^{-9}$ cm und $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-9}$ cm; das Resultat derselben wird durch die folgenden vier Figuren veranschaulicht.

In jeder Figur ist senkrecht zu einer horizontalen ϑ -Achse, welche von 0 bis π geht, die Größe e^M aufgetragen, und zwar für die Temperaturen $T = 0, 300, 600, 900, 1200$. Die Figuren mit dem Index a beziehen sich auf den Fall verschwindender Nullpunktsenergie (Gl. (62)), die Figuren mit dem Index b dagegen wurden unter Annahme einer Nullpunktsenergie berechnet (Gl. (62')). Für 4a und 4b ist $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-9}$ cm, für 5a und 5b ist $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-9}$ cm. Die Zahlen neben oder an den Kurven bedeuten die Temperaturen, für welche sie berechnet sind.¹⁾

Die Ordinaten der Kurven messen den Intensitätsabfall der Interferenzintensität; der senkrechte Abstand von den Kurven

1) Durch ein Versehen wurden in den folgenden Figuren unrichtige Zahlen für die zugehörigen Wellenlängen eingezeichnet. Statt 10^{-8} , resp. $5 \cdot 10^{-9}$, soll es heißen $7,1 \cdot 10^{-9}$, resp. $3,5 \cdot 10^{-9}$.

bis zur oberen Horizontale in der Höhe 1 ist proportional der gleichzeitig vorhandenen, zu derselben Wellenlänge gehörigen zerstreuten Intensität, soweit die Veränderlichkeit ihre Ursache in der Wärmebewegung findet.¹⁾

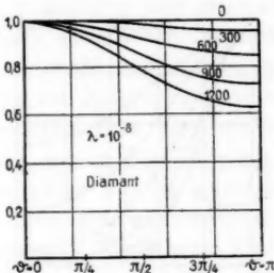


Fig. 4 a.

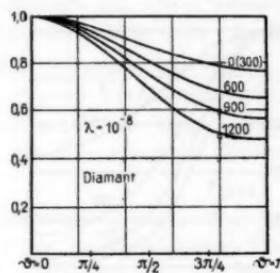


Fig. 4 b.

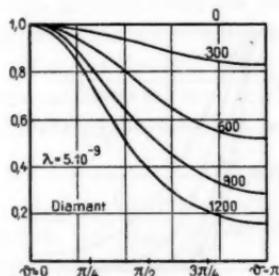


Fig. 5 a.

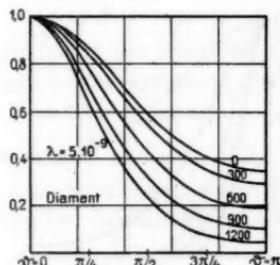


Fig. 5 b.

Vor allem zeigen die Figuren den großen Einfluß einer Nullpunktsenergie vorausgesetzt, daß bei genügend kleiner Wellenlänge beobachtet wird. Während nämlich in den Figuren mit dem Index *a* die Kurve schließlich für $T = 0$ mit der Horizontalen in der Höhe 1 zusammenfällt, ist das bei Anwesenheit einer Nullpunktsenergie nicht der Fall. Wie die Figuren *b* zeigen ist die Grenzkurve für $T = 0$ erheblich von den ebengenannten horizontalen verschieden, besonders bei der Wellenlänge $3,5 \cdot 10^{-9}$. Bei noch kleinerer Wellenlänge würde der Unterschied noch viel größer werden.

1) Für die Reduktion auf die wirklich beobachtbare und im Experiment aufhebende Intensität vgl. man den zweiten Zusatz am Schluß.

Um die Sonderstellung, welche Diamant einnimmt, näher zu beleuchten, wurde dieselbe Rechnung wie oben auch noch für Sylvian durchgeführt.¹⁾ In diesem Falle erhält man eine leidliche Darstellung der Kurve für die spezifische Wärme

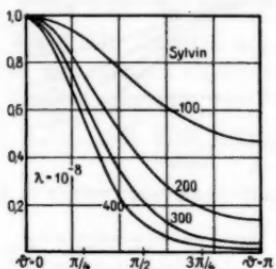


Fig. 6 a.

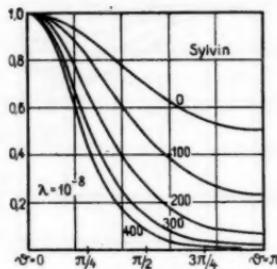


Fig. 6 b.

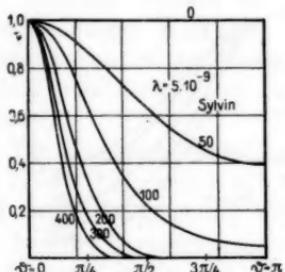


Fig. 7 a.

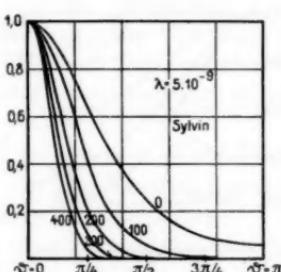


Fig. 7 b.

nach meiner Formel mit $\Theta = 219$. Dieser Wert für Θ wurde angenommen, außerdem wurde A gleich 37 gesetzt (Mittel zwischen $K = 39$ und $Cl = 35$). Die Kurven wurden ebenfalls wieder berechnet für $\lambda = 7,1 \cdot 10^{-9}$ cm und für $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-9}$ cm, unter Annahme verschwindender Nullpunktsenergie (Kurven a) und unter Annahme der Existenz einer Nullpunktsenergie (Kurven b).

Der Unterschied der beiden Auffassungen, bezüglich der Grenzkurve für $T = 0$, kommt hier noch deutlicher zum Ausdruck wie beim Diamanten. Insbesondere aber kommt die stär-

¹⁾ Sylvian wurde gewählt, weil diese Substanz mit großer Wahrscheinlichkeit als einatomiger Körper behandelt werden darf.

kere Amplitude der Wärmebewegung voll zur Geltung. Dem entspricht es, daß wir jetzt starke Veränderungen wahrnehmen im Temperaturgebiete unterhalb mittlerer Zimmertemperatur, während beim Diamanten kein sehr großer Unterschied zwischen $T = 0$ und $T = 300$ mehr zu verzeichnen ist. Wir zeichneten deshalb die Kurven für $T = 0, 100, 200, 300, 400$. Auch sei noch darauf aufmerksam gemacht, wie sich bei Sylvin und fehlender Nullpunktsenergie eine rapide Veränderlichkeit der Intensitätskurve erst von etwa $T = 100$ an zeigt. Deshalb haben wir in Fig. 7a auch noch die Kurve für die Zwischen-temperatur $T = 50$ eingetragen.

Die Kurven dürften klar erkennen lassen, daß es die wenigstens angenäherte Richtigkeit der vorgeschlagenen Theorie vorausgesetzt, möglich sein muß mittels Messungen über die Intensitätsverteilung als Funktion der Temperatur eine endgültige Entscheidung für oder wider der Hypothese der Nullpunktsenergie zu erbringen.

An der hiesigen Stelle fehlten leider die Mittel zu dieser Untersuchung, ich muß mich deshalb jeder Vermutung über das wahrscheinliche Resultat solcher Versuche enthalten.

Zusammenfassung.¹⁾

1. Die Wärmebewegung der Atome hat einen wesentlichen Einfluß auf die bei Röntgenstrahlen beobachtbaren Interferenzerscheinungen.
2. Die Schärfe der Interferenzmaxima wird nicht, ihre Intensität, ebenso wie die räumliche Intensitätsverteilung aber wohl beeinflußt.
3. Die Interferenzintensität nimmt wegen der Wärmebewegung exponentiell ab
 - a) mit zunehmendem Winkelabstand zwischen Einfalls- und Beobachtungsrichtung,
 - b) mit zunehmender Temperatur,
 - c) mit abnehmender Wellenlänge.
4. Der Exponent der ebengenannten Exponentialfunktion verschwindet bei $T = 0$ bei fehlender Nullpunktsenergie und behält einen endlichen, wesentlich in Betracht kommenden Wert, wenn eine Nullpunktsenergie existiert.

1) Man beachte die Einschränkung der Anmerkung p. 65.

5. Der Exponent ist stets umgekehrt proportional dem Quadrate der Wellenlänge.

6. Die Interferenzintensität ist stets begleitet von einer zerstreuten Intensität, welche dort am intensivsten ist, wo die Interferenzintensität am meisten geschwächt erscheint und umgekehrt.

7. Der Verlauf der Erscheinungen läßt sich annäherungsweise vorausberechnen, wenn Daten über den Verlauf der spezifischen Wärme als Funktion der Temperatur vorliegen.

8. In der betreffenden Näherung gilt ein Ähnlichkeitsgesetz wie bei den spezifischen Wärmern einatomiger Körper, wonach auch hier der Temperaturverlauf nur Funktion von dem Verhältnis der charakteristischen Temperatur Θ zur Beobachtungstemperatur ist.

Utrecht, 29. September 1913.

(Eingegangen 10. Oktober 1913.)

Zusätze bei der Korrektur (26. November 1913):

1. Inzwischen teilte mir A. Sommerfeld eine Fassung der obigen Resultate mit, welche die räumliche Verteilung der Wärmewirkung auf die Interferenzpunkte in sehr einfacher Weise allgemein zu übersehen gestattet.

Wir fanden, daß z. B. bei fehlender Nullpunktsenergie der Wärmeeffekt gemessen wird durch eine Exponentialfunktion mit einem Exponenten M , welcher nach (62) und (61) unter Wiedereinführung der Richtungscos. $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha, \beta, \gamma$ auf die Form:

$$(63) \quad M = -\frac{3h^2}{2\mu k \Theta \lambda^2} \frac{\Phi(x)}{x} [(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]$$

gebracht werden kann. In einem Interferenzpunkt aber kann dafür nach den Grundformeln

$$(64) \quad \alpha - \alpha_0 = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta - \beta_0 = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad \gamma - \gamma_0 = h_3 \frac{\lambda}{a}$$

der Laueschen Theorie (für das reguläre System bei beliebiger Incidenz gültig) auch geschrieben werden

$$(63') \quad M = -\frac{3h^2}{2\mu k \Theta a^2} \frac{\Phi(x)}{x} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$$

ein Ausdruck, aus dem nun die Wellenlänge als solche verschwunden ist und nur mehr die für den Interferenzpunkt charakteristischen ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3 übriggeblieben sind.

Unser ursprünglicher Ausdruck (63) für M bezog sich, wie mehrfach hervorgehoben, auf eine bestimmte Wellenlänge und verglich den Temperatureinfluß auf die verschiedenen Richtungen ϑ , in denen dieselbe Wellenlänge auftreten kann. In den Laueschen Photogrammen ist die Wellenlänge von Punkt zu Punkt verschieden; der Ausdruck (63) indessen gestattet eben Punkte verschiedener Wellenlänge in einfacher Weise miteinander zu vergleichen.

In der Auffassung des Hrn. Bragg kann bekanntlich das Auftreten des Interferenzfleckes h_1, h_2, h_3 beschrieben werden als Reflexion an einer kristallographisch möglichen Ebene, deren Indices sich verhalten wie $h_1 : h_2 : h_3$. Eine solche Ebene ist aber um so spärlicher mit Atomen belegt, je größer die Quadratsumme ihrer Indices ist. Durch (63') wird also ausgedrückt, daß die Wärmeschwächung der Interferenzflecke um so mehr ins Gewicht fällt, je weniger dicht die reflektierenden Ebenen mit Atomen belegt sind.

2. Hr. H. A. Lorentz teilte mir während der Drucklegung der vorhergehenden Notiz brieflich einige Bemerkungen mit in bezug auf die Berechnung der wirklich beobachtbaren Intensität der Interferenzflecke. Jene Bemerkungen müssen durchaus beachtet werden, wenn man experimentell auf dem oben auseinandergesetzten Wege zu einer Entscheidung zwischen den beiden Planckschen Hypothesen kommen will.

In Wirklichkeit operiert man nämlich weder mit *absolut monochromatischer Strahlung*, noch mit einer *einzigem Einfallsrichtung*. So kommt es, daß man in einer bestimmten Beobachtungsrichtung Energie von verschiedenen Wellenlängen und verschiedenen Einfallsrichtungen zusammenfassen wird.

Läßt man zunächst den Wärmeeinfluß unberücksichtigt, dann wird man nach (3) zu Wellen, welche im räumlichen Winkelement $d\Omega_0$ einfallen und das Spektralgebiet $d\mathbf{x}$ füllen eine sekundäre Intensität berechnen, welche dargestellt werden kann durch den Ausdruck

$$(64) \frac{A}{r^2} d\Omega_0 d\mathbf{x} \sum \sum e^{i \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} [(a - a_0) n_1 - n_1'] + (\beta' - \beta_0) (n_2 - n_2') + (\gamma - \gamma_0) (n_3 - n_3')}]$$

wenn wir uns der Einfachheit halber auf den regulären Fall beschränken. Hat man $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha, \beta, \gamma$ und α so gewählt, daß den Laueschen Bedingungen in einem Punkte mit den charakteristischen Zahlen h_1, h_2, h_3 genüge geleistet wird und läßt dann nachträglich $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und α etwas variieren, dann wird man diese Variationen messen können durch drei Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, welche man einführen kann, mittels der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - \alpha_0) &= h_1 2\pi + \varepsilon_1, & \alpha(\beta - \beta_0) &= h_2 2\pi + \varepsilon_2, \\ \alpha(\gamma - \gamma_0) &= h_3 2\pi + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Die wirklich beobachtbare Intensität erhält man nun durch Summation nach $d\Omega_0 dx$ über einen endlichen Bereich; bedenkt man, daß in den neuen Koordinaten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ das entsprechende Integrationselement den Wert

$$\frac{1}{x^2 \alpha^3} \frac{2}{[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3$$

hat, so erhält der integrierte Ausdruck die Form:

$$(64') \quad \frac{A^2}{r^2} \frac{1}{x^2 \alpha^3} \frac{2}{[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]} \sum \sum \int \int \int d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 e^{i[\varepsilon_1(n_1 - n_1') + \varepsilon_2(n_2 - n_2') + \varepsilon_3(n_3 - n_3')]}.$$

Die Integration darf ausgeführt werden zwischen den Grenzen $-e_1 < \varepsilon_1 < +e_1, -e_2 < \varepsilon_2 < +e_2, -e_3 < \varepsilon_3 < +e_3$, wobei e_1, e_2, e_3 kleine, aber endliche Zahlen bedeuten. So erhält man

$$(64'') \quad \frac{A^2}{r^2} \frac{8}{x^2 \alpha^3} \frac{2}{[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]} \sum \sum \frac{\sin(n_1 - n_1') e_1}{n_1 - n_1'} \frac{\sin(n_2 - n_2') e_2}{n_2 - n_2'} \frac{\sin(n_3 - n_3') e_3}{n_3 - n_3'}$$

Hält man zunächst n_1, n_2, n_3 fest und führt die Summation nach n_1', n_2', n_3' durch, dann kann für diese Teilsumme mit Rücksicht auf die Kleinheit von e_1, e_2, e_3 auch substituiert werden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin e_1 u_1}{u_1} \frac{\sin e_2 u_2}{u_2} \frac{\sin e_3 u_3}{u_3} du_1 du_2 du_3 = \pi^3.$$

Ist N die Anzahl bestrahlter Atome, dann hat man dieselbe Rechnung bei der Durchlaufung von n_1, n_2, n_3 im ganzen N mal zu wiederholen. Als Ausdruck für die beobachtbare

Intensität in einem Interferenzpunkt erhält man also den Wert:

$$(65) \quad \frac{A^2}{r^2} \frac{8\pi^3}{\pi^2 a^3} \frac{2N}{[(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 + (\gamma - \gamma_0)^2]}$$

oder auch mit Rücksicht auf die Laueschen Bedingungen:

$$(65') \quad \frac{A^2}{r^2} \frac{4\pi}{a} \frac{N}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.$$

Der Einfluß der Wärmebewegung kann durch Hinzusetzen des Faktors e^M gemessen werden. Man sieht indessen, daß infolge der experimentell stets ausgeführten Mittelung außerdem noch eine durch die Summe der Quadrate der charakteristischen ganzen Zahlen im Nenner von (65') gemessene Schwächung auftritt. Schließlich kann noch die räumliche Strahlung eines einzelnen Atoms für verschiedene Richtungen verschieden sein. Im einfachsten Falle (Strahlung eines gebundenen Elektrons z. B.) kann das dadurch berücksichtigt werden, daß man A^2 proportional $1 + \cos^2 \vartheta$ setzt. (ϑ Winkel zwischen Einfalls- und Beobachtungsrichtung.)

5. *Über Maximalintensität, Dämpfung und wahre Intensitätsverteilung von Serienlinien in Absorption;*
von Chr. Füchtbauer u. W. Hofmann.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Anbahnung einer quantitativen Spektroskopie für die Hauptserienlinien eines Alkalimetallaltes: Es sollte die *Intensitätskurve der Linien in Absorption an vollständig definierten, homogenen Schichten der Alkalimetalldämpfe* bestimmt werden¹⁾.

Die Emission konnte nämlich für ein solches Unternehmen nicht in Frage kommen, denn erstens kann sie durch die Erregungsbedingungen beeinflußt werden, so daß den verschiedenen Linien nicht notwendig konstante Intensitätsverhältnisse zukommen müssen. Zweitens kann man bei Emission nie die äußeren Umstände, wie den Druck des mit dem Dampf gemischten Gases variieren, ohne die gesamte Erregung zu ändern. Es ist also die Untersuchung gerade der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten unmöglich. Aber auch bei der Absorption sind die bisher, wie es scheint fast ausschließlich angewandten Flammen²⁾ zu verlassen, wegen folgender Nachteile: Man kann schwer bei konstanter Dampfdichte den Druck und das um-

1) Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden auf der 85. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien vorgetragen. Vgl. Chr. Füchtbauer und Curt Schell, Methoden zur quantitativen Untersuchung von Absorptionslinien, speziell der Natriumlinien; *Phys. Zeitschr.* 14. p. 1164. 1913; Verh. d. D. Phys. Ges. 15. p. 974. 1913 und Chr. Füchtbauer und W. Hofmann, Über Maximalintensität, Dämpfung und wahre Intensitätsverteilung von Absorptionslinien des Cäsiums; *Phys. Zeitschr.* 14. p. 1168. 1913; Verh. d. D. Phys. Ges. 15. p. 982. 1913. (Anmerkung bei der Korrektur.)

2) Vgl. z. B. die interessante Arbeit von Iwanow, *Phys. Zeitschr.* 13. p. 1116. 1912, über die Schwierigkeiten bei Flammen, wie das gleichzeitige Auftreten von Absorption und Emission.

gebende Gas variieren und man kann eine Flamme nicht mit der nötigen Genauigkeit reproduzieren.

Bei unserem Verfahren, bei dem das Metall in einer Glashöhre erhitzt wird, konnten wir die Absorption an der Stelle des Maximums bei einer Cäsiumlinie bis auf einige Prozente reproduzieren, mit derselben Sicherheit wie die irgend eines Farbstoffes. Nötig war nur die Wiederherstellung der Temperatur bis auf $\frac{1}{4}$ Grad.

Für den vorliegenden Zweck könnte auch die magnetische Drehung und die Dispersion in Betracht kommen. Die magnetische Drehung scheidet aus, weil durch das Magnetfeld ein neuer, wenn auch theoretisch wohl begründeter Gesichtspunkt hineinkommt, also eine überflüssige Komplikation.

Die Dispersion wäre prinzipiell gleichwertig. In der Tat ist sie durch Bevan¹⁾ benutzt worden zu einer vergleichenden Untersuchung verschiedener Serienlinien. Allein der Dispersion haften praktisch drei große Übelstände an: Erstens kann man die Konstante der zwei Linien der Paare nur schwer trennen bekommen, man wird sich häufig damit begnügen müssen, beide Linien wie eine einzige zu behandeln und das hat auch Bevan, der wohl die wichtigste Untersuchung nach dieser Methode gemacht hat, fast stets getan. Zweitens erfordert die Methode plane Endflächen, die aufgekittet und darum dem Ofen entzogen sind, im Gegensatz zu den geblasenen Endflächen unserer Röhren. Die Folge ist die Unmöglichkeit einer sehr genauen Wiederherstellung des nämlichen Zustandes der Röhre, was die Genauigkeit aller der Vergleichungen beeinträchtigt, die zeitlich nacheinander ausgeführt werden müssen. Außerdem ist infolge fortwährender Destillationen der Dampfdruck undefiniert und es läßt sich keine den Dampfdruck bestimmende Temperatur angeben. Drittens liefert die Methode nur *eine* Konstante, die Teilchenzahl. Zwar steht die Dämpfung in den Gleichungen, aber praktisch hat sie, da man nicht weit in den Absorptionsstreifen hineinmessen kann, zu wenig Einfluß, um auch nur annähernd bestimmt werden zu können. Deshalb haben Wood²⁾,

1) P. V. Bevan, Proc. of the Roy. Soc. 84. p. 209. 1910; Proc. of the Roy. Soc. 85. p. 58. 1911.

2) R. W. Wood, Phil. Mag. 8. p. 293. 1904.

Ladenburg¹⁾, Bevan²⁾ alle die Dämpfung vernachlässigt, wie es auch bei ihrer Methode rationell ist. Die einfache Aufnahme der Absorptionskurve liefert dagegen sofort Teilchenzahl und *Dämpfung*.

Wir wollen zunächst die theoretischen Gesichtspunkte behandeln, nach denen die folgenden Versuche unternommen und berechnet wurden. Es wurde die *Drudesche Theorie* zugrunde gelegt, obwohl *sichere* und *gesetzmäßige Abweichungen* aller unserer Kurven von ihr vorhanden sind. Diese Abweichungen werden auch weiterhin besonders genau untersucht werden, da sie zu einer neuen Verbesserung der Theorie, mittels Einführung einer dritten Konstante, dienen müssen. Die bisherigen Verbesserungen der Drudeschen Theorie bleiben nämlich in unserem Fall weit unter den Fehlern. Zunächst die Lorentzsche Verbesserung, welche in der Einführung eines Zusatzgliedes zur elektrischen Kraft besteht, liefert, wie man sich leicht ausrechnen kann, nur ein unmerkbar kleines Glied, weil die Zahl der Resonatoren klein ist. Sodann wurde der Fall absichtlich so gewählt, daß die Verbreiterung durch den *Dopplereffekt* klein war gegen die durch die Zusammenstöße hervorgerufene Verbreiterung. Denn die Untersuchung des Dopplereffektes, der die Breite der Linien in stark verdünnten Gasen gewöhnlich bedingt, ist durch Michelson³⁾ weitgehend erledigt, so daß wir uns wenig Neues davon versprachen. Wir begaben uns also mit Absicht in das Gebiet, in welchem die von Lorentz eingeführte *Stoßdämpfung* den Dopplereffekt weit überwiegt. Zusammen mit der Stoßdämpfung bedeutet der Dopplereffekt nur eine Komplikation, die möglichst zu vermeiden war. Es wurde deshalb das Cäsium mit seinem hohen Atomgewicht genommen. Seine Molekulargeschwindigkeit (Molekül einatomig) ist $V = 2,53 \times 10^4$ bei $T = 400^\circ$. Man sieht sofort, daß die durch sie bewirkte Verbreiterung klein sein muß gegen die bei unseren Experimenten tatsächlich vorhandene. Nachträglich konnte das auch

1) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 38. p. 249. 1912.

2) P. V. Bevan, l. c.

3) A. A. Michelson, Phil. Mag. 34. p. 280. 1892; vgl. auch Fabry und Buisson, Compt. rend. 154. p. 1224. 1892.

noch durch exakte Ausrechnung nach der von Voigt¹⁾ gegebenen Formel gezeigt werden. Sie lautet, so wie sie Voigt vereinfacht:²⁾

$$n \propto = \text{const. } \frac{1}{\beta'} \arctg \left(\frac{2 \alpha \beta'}{\mu^2 + \alpha^2 - \beta'^2} \right)$$

und geht für „ β' klein gegen α “ in die Drudesche über. Es ist bei uns α , die mittlere Stoßzahl eines Elektrons in der Zeiteinheit, $= \nu'/2$; $\beta' = \nu_0 \frac{V}{c}$.

Bei unseren Versuchen ist beim tiefsten verwendeten Druck, also dem Fall, wo der Dopplereffekt den größten Einfluß hätte: $\nu = 4 \times 10^{11}$; $\alpha = \nu'/2 = 2 \times 10^{11}$.

Für das blaue Cäsiumpaar ist die Frequenz $\nu_0 = 4 \times 10^{15}$. Also $\beta' = \frac{4 \times 10^{15} \cdot 2,53 \times 10^4}{3 \times 10^{10}} = 3,37 \times 10^9$. Also $\beta' = 0,0168 \cdot \alpha$.

Daher ist β'^2 zu vernachlässigen gegen α^2 .

Da nun μ von der Größenordnung $\nu'/2 = \alpha$ ist, so wird das Argument von der Größenordnung β'/α ; da $\arctg 0,0168 = 0,0168$ ist, kommt

$$n \propto = \text{const. } \frac{1}{\beta'} \cdot \frac{2 \alpha \beta'}{\mu^2 + \alpha^2} = \text{const. } \frac{2 \alpha}{\mu^2 + \alpha^2},$$

also frei von β' , wie in der Drudeschen Theorie.

Die Dämpfung der Teilchen durch *Ausstrahlung* ist gegen die Stoßdämpfung gänzlich zu vernachlässigen.

Die Formeln der Drudeschen Theorie wurden in der Form benutzt, wie sie Voigt in seiner Magnetooptik³⁾ gibt (p. 34, 107 und 112). Und zwar in der Vereinfachung, die für schwache *Absorption* eintritt, d. h. für $\varrho/\nu_0 \nu'$ klein gegen Eins. Es war $\varrho = \text{ca. } 1,6 \times 10^{21}$, $\nu_0 = 4 \times 10^{15}$, $\nu' = 4 \times 10^{11}$,

$$\text{also } \frac{\varrho}{\nu_0 \nu'} = \frac{1,6 \times 10^{21}}{16 \times 10^{26}} = 10^{-6},$$

also dieser Fall gegeben.

Wir wollen aus den bei Voigt gegebenen die Formeln, die wir brauchen, ableiten.

1) W. Voigt, Phys. Zeitschr. 14. p. 378. 1913.

2) Erklärung der Bezeichnungen vgl. später.

3) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1908.

Fig. 1 soll die Bezeichnungen veranschaulichen. Die Abszissen μ sind von der Stelle größter Absorption aus nach beiden Seiten positiv und negativ gerechnet. Ordinaten sind die Intensitäten. J_0 sei die Intensität, welche ohne Absorption am Ort der photographischen Platte herrscht, J_m die Intensität im Maximum der Absorptionslinie. J ist die Intensität an den Stellen, wo die Absorption, d. h. die Größe $n\chi$, auf die Hälfte ihres Wertes $(n\chi)_m$ an der Stelle maximaler Absorption gesunken ist. Für diese Stellen ist $\mu = \pm \nu'/2$, ν' das Halbwertsintervall. Ist i die durchgelassene Intensität im allge-

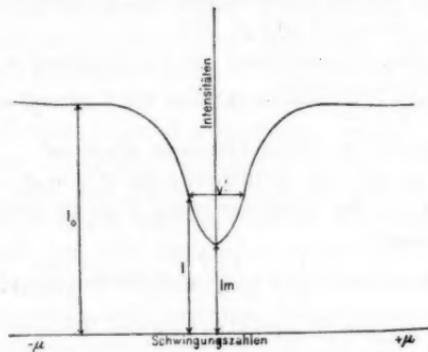


Fig. 1.

meinen Fall, l die Länge der Röhre, λ die Wellenlänge im Vakuum, so gelten die folgenden Beziehungen:

$$\frac{i}{J_0} = e^{-4\pi \frac{l}{\lambda} n\chi}.$$

Bezeichnen wir den Exponenten für die Halbwertsstelle mit $-q$, so ist er nach deren Definition für das Maximum $-2q$. Also

$$\frac{J}{J_0} = e^{-q}; \quad \frac{J_m}{J_0} = e^{-2q}; \quad \left(\frac{J}{J_0}\right)^2 = \frac{J_m}{J_0},$$

$$(1) \quad J = \sqrt{J_0 J_m},$$

$$(2) \quad (n\chi)_m = \frac{\lambda}{4\pi l} \ln \frac{J_0}{J_m}.$$

Hat man nun in der nachher zu beschreibenden Weise eine Kurve erhalten, welche i als Funktion der Schwingungszahl (oder Wellenlänge) darstellt und bis in Gebiete reicht,

in denen die nicht durch Absorption geschwächte Intensität J_0 herrscht, so kann man einerseits J_m und J_0 abmessen und so $(n\alpha)_m$ berechnen; andererseits zieht man bei der durch (1) gegebenen Ordinate J eine Parallele zur Abszissenachse, deren Stück zwischen den Kurvenästen direkt das Halbwertsintervall ν' liefert.

Für die theoretische Verwertung dieser *von jeder Hypothese unabhängigen* Daten $(n\alpha)_m$ und ν' verfolgen wir die folgenden Gesichtspunkte: Unsere später zu diskutierenden Kurven zeigen, daß die Abweichungen von der Drudeschen Theorie (ein steilerer Abfall der Kurven nach der Seite kürzerer Wellenlängen) doch verhältnismäßig klein sind, und daß die Kurven innerhalb der Fehlergrenzen symmetrisch sind vom Maximum der Absorption bis über die Halbwertsstelle hinaus. Dieses Gebiet allein genügt aber, neben der Intensität J_0 , der Stelle ohne Absorption, zur Berechnung von $(n\alpha)_m$ und ν' . Es scheint uns deshalb ziemlich unbedenklich und zunächst, wenn man überhaupt die Zahlen theoretisch verwerten will, allein möglich, nach der Drudeschen Theorie zu rechnen und die *bei allen von uns untersuchten Linien* sicher gefundene Unsymmetrie als einen Effekt für sich zu behandeln; derselbe mußte natürlich zu einer weiteren Konstanten der Linien führen, wenn er hierzu genau genug beobachtet wäre.

Wenn wir nun die Drudesche Theorie benutzen, so führen wir bloß *formal* die Reibungsdämpfung h ein; wir denken uns mit H. A. Lorentz¹⁾ die Schwingungen praktisch ungedämpft²⁾, aber von Zeit zu Zeit durch eine plötzliche Störung (zusammenhängend mit der Gegenwart der umgebenden Gasmoleküle) abgebrochen, dann durch die einfallende Welle von neuem angeregt. Lorentz hat ja gezeigt, daß das zu den nämlichen Gleichungen führt, wie die Reibungsdämpfung. Es ist dabei die Zahl der dämpfenden Störungen:

$$(3) \quad Z = \frac{\nu'}{2}.$$

Weitere gebrauchte Formeln der Drudeschen Theorie nach Voigt seien zur Erklärung der Bezeichnungen hier ange-

1) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 25. Jan. 1906.

2) Die Ausstrahlung bewirkt eine Dämpfung, die, da sie klein ist, vernachlässigt wird.

führt. Die Schwingungsgleichung des Elektrons lautet: $m x'' + h x' + k x = e X$.

Ferner die Frequenz, in deren Ausdruck die Dämpfung vernachlässigt werden kann,

$$(4) \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$(5) \quad \nu' = \frac{h}{m},$$

$$(6) \quad \varrho = \frac{4\pi \mathfrak{N} e^2}{m},$$

wo \mathfrak{N} die Zahl der schwingenden Teilchen (Elektronen) in der Volumeinheit ist. Ist n_0 der Brechungsindex, der an der Stelle der Linie ohne deren Vorhandensein herrschen würde, so ergibt sich im Fall kleiner Absorption erstens, daß das Halbwertsintervall gleich der durch h/m definierten Größe ν' ist und zweitens für das die Teilchenzahl bestimmende ϱ die Beziehung:

$$(n x)_m = \frac{\varrho}{2 n \nu_0 \nu'}.$$

Wir können nun für unsere Gase $n_0 = 1$ setzen und erhalten:

$$(7) \quad \varrho = (n x)_m \cdot 2 \nu_0 \nu'.$$

Methode und Versuchsanordnung.

Charakteristisch für die angewandte Methode ist, daß die zur Messung nötige Breite der Linien nicht durch große Dichte des Dampfes des betreffenden Metalles, sondern durch Zusatz eines *fremden Gases*, dessen Druck groß ist neben dem *Dampfdruck des Alkalimetalls*, erreicht wurde. Diese Methode wurde schon früher¹⁾ benutzt und die Verbreiterung der sehr dicht beieinander befindlichen Bandenlinien des Broms und Jodes durch Zusatz der fremden Gase mit dem Stufengitter nachgewiesen. Die Methode bietet, wie damals hervorgehoben, den großen Vorteil, daß man alle die Kurvenform, die Dämpfung und die Zusammenstöße betreffenden Dinge untersuchen, vor allem durch Änderung der Dichte des fremden Gases die Dämpfung innerhalb der weitesten Grenzen ändern kann, ohne an der Temperatur und der Dampfdichte etwas zu ändern.

1) Chr. Füchtbauer, Naturforscherversammlung Salzburg 1909. Phys. Zeitschr. 12. p. 722. 1911.

Die Versuchsröhren waren an den Enden zur besseren Durchsicht aufgeblasen. Nach dem Auspumpen mittels einer Gaedepumpe wurde in die Röhre Alkalimetall hineindestilliert, welches schon vorher durch mehrfache Destillationen von Paraffinöl und Wasserstoff befreit war. Dann wurde Stickstoff bis zu dem gewünschten Druck eingefüllt und abgeschmolzen. Die meist benutzten Röhren mit höherem Druck waren dagegen so eingerichtet, daß der Druck durch ein Hebegefäß mit Quecksilber beliebig geändert werden konnte, indem das Quecksilber den Stickstoff in einem mit der Röhre verbundenen Glasreservoir komprimierte. Dabei war Vorsorge getroffen, daß das Metall nicht durch die mit dem Stickstoff strömenden Quecksilberdämpfe verunreinigt werden konnte. So oft der Stickstoff in der Röhre verdichtet wurde, war ein kleines zwischen Röhre und Reservoir befindliches U-Rohr in feste Kohlensäure getaucht. Im U-Rohr kondensierten sich sichtlich große Mengen Quecksilber. Außerdem war die Wand der Verbindungsrohre auf eine ca. 40 cm lange Strecke von der Versuchsröhre an mit hineindestilliertem Cäsium bedeckt, welches die Quecksilberreste schon außerhalb des Ofens abfangen sollte. Der Druck konnte dann stets an einem mit dem Hebegefäß verbundenen offenen Manometer, das gleichzeitig als Luftfalle für die vom Hebegefäß her etwa kommenden Luftbläschen dienen sollte, abgelesen werden.

Der Stickstoff wurde teils aus einer Bombe entnommen und durch glühendes Kupfer und ein Phosphorsäurerohr von Sauerstoff und Wasserdampf befreit. Teils wurde der Stickstoff aus Ammoniumnitrit hergestellt und durch Ferrosulfatlösung und lange Verbrennungsöfen mit glühendem Klaviersaitendraht und Kupferspiralen besonders von Stickoxyden befreit, darauf durch Phosphorsäure getrocknet.

Für die Photometrie kam nur die photographische Methode in Betracht. Da kurz nach Beginn unserer orientierenden Versuche die erste Mitteilung von P. P. Koch¹⁾ über ein sorgsam durchgebildetes und erprobtes Verfahren der photographischen Photometrie erschien, wurde dieses ausschließlich angewandt. Es besteht darin, daß auf jede Platte außer der zu untersuchenden

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 30. p. 841. 1909.

Erscheinung mit der nämlichen Expositionszeit kleine Flächen exponiert werden, deren Schwärzung bekannten Intensitätsverhältnissen entspricht (Intensitätsmarken). Beim Absorptionsproblem sind ja nur die *Verhältnisse* von Intensitäten zu messen.

Die Anordnung zum Drucken der Intensitätsmarken zeigt Fig. 2. Der Nernstbrenner N wurde durch die Linse L auf den Spalt S_1 eines Hilgerschen Spektroskops mit 90° Ablenkung abgebildet. Aus dem Spektrum blendete der Spalt S_2 eines Fernrohres ein Stück von passender Breite aus, dessen

* N

— L

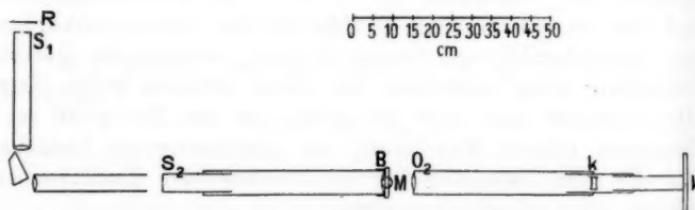


Fig. 2.

Höhe durch eine Lochblende abgegrenzt wurde. Bei B im parallelen Strahlengang ist eine Spaltblende angebracht, die, ca. auf $1/100$ mm genau gearbeitet, bei größter Öffnung 20×20 mm mißt und mittels einer Mikrometerschraube M die Intensität des durchgehenden genügend monochromatischen Lichtes in meßbarer Weise abzuändern gestattet. Sie wurde von 20 bis 0,5 mm benutzt. Durch ein zweites Fernrohrobjektiv O_2 wird dann, nach ca. 6 facher Vergrößerung durch die Konkavlinse k , ein Bildchen der rechteckigen Öffnung S_2 auf der Platte entworfen. Die Kassette des Aufnahmegerätes paßt in den Rahmen K . Variationen der Lichtstärke, entsprechend der verschiedenen Intensität der zur Absorptionsmessung benutzten kontinuierlichen Spektren, werden durch Rauchgläser R bewirkt. Wichtig ist, daß die Blende B mit horizontal liegenden Spalt-

backen benutzt wird. Da nämlich in dem Gebiet, in welchem das Prisma stark absorbiert, die verschiedenen Teile des parallelen Strahlenganges, in der Horizontalen genommen, ziemlich verschiedene Intensität besitzen, würde die geometrische Grundlage der Methode bei vertikaler Spaltrichtung verloren gehen. Durch eine bei *B* angebrachte photographische Platte wurde die Lichterfüllung eigens geprüft. Sie wurde für die Gegend des blauen Cs-Paars nahezu gleichmäßig gefunden, für das ultraviolette Paar $\lambda = 3877$ Å.-E. und $\lambda = 3889$ Å.-E. aber nur in der Horizontalen varierend. Längs einer Vertikalen zeigte die Schwärzung dagegen sowohl beim blauen wie beim ultravioletten Licht keine meß-

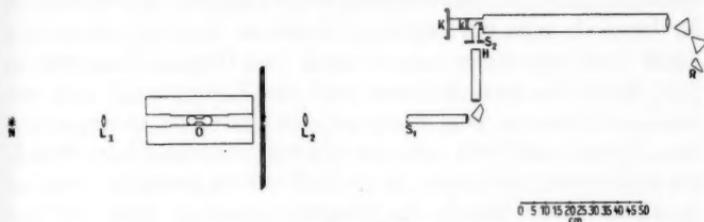


Fig. 3.

baren Unterschiede. Also war die Voraussetzung erfüllt, daß die Lichtintensität der Blendenbreite proportional ist. Die Nernstlampe war durch Vorschalten eines weiteren Nernstwiderstandes unterbelastet und brannte an einer Batterie von 120 Volt, die dauernd kontrolliert wurde. Nach einstündigem Brennen kann man auf Konstanz der Lampe rechnen. Alle Marken wurden doppelt gedruckt, zu beiden Seiten der Erscheinung, so daß sie an sehr verschiedene Stellen der Platte fielen. Sie stimmten stets genügend überein.

Die Anordnung bei den Absorptionsaufnahmen ist folgende (Fig. 3). Die Nernstlampe *N* wird durch die Linse *L*₁ in die Röhre abgebildet, welche im elektrischen Ofen *O* liegt. Dann geht das Licht durch ein Fenster *F* in einen Raum von konstanter Temperatur. Die Linse *L*₂ erzeugt ein Bild des horizontalen Nernstfadens auf dem Spalt *S*₁ eines Spektroskopes¹⁾

1) Für die freundliche Überlassung dieses Apparates sind wir Hrn. Dr. V. Schumann zu großem Dank verpflichtet.

mit 90° Ablenkung. Derselbe ist soweit geöffnet, daß im Spektrographen ein genügender Teil des kontinuierlichen Spektrums neben der Absorptionslinie erscheint. Die Vorzerlegung ist wünschenswert, um das diffuse Licht bis zur Unmerklichkeit einzuschränken. Das Spektrum konnte nach Abschrauben eines Teiles des Okulars mittels des durch Schneckenzug verstellbaren anderen Teiles *H* scharf auf den Spalt *S₂* des Spektrographen eingestellt werden.

Der Spektrograph, der demnächst beschrieben werden wird, war für diese Arbeit gebaut und nach Auflösung und Lichtstärke dem Zweck angepaßt worden. Der im Leipziger Institut gebaute Prismentisch besitzt eine neue automatische Minimumeinstellung, bei der Stahlbänder statt Zahnrädern benutzt werden. Er hat sich sehr gut bewährt. Das vom Spalt *S₂* kommende Licht wird vom Spiegelchen *s* nach dem Objektiv hingeworfen, geht durch die zwei Prismen und das Halbprisma, wird von dessen versilberter Rückfläche *R* reflektiert und gelangt unter dem Spiegel hindurch auf die photographische Platte bei *K*. Im sichtbaren Gebiet, wo es die Lichtstärke gestattet, wird das Spektrum noch durch das Negativsystem *k* etwa auf das $2\frac{1}{4}$ -fache vergrößert. Die Basis der Prismen ist 70 mm, die Brennweite des zweiteiligen unverkitteten Objektives 850 mm; *k* ist ein Negativsystem von 56 mm Brennweite. Wichtig ist, daß zwei Prismensätze vorhanden sind, von denen der eine ($n = \text{ca. } 1,8$) eben noch für die blauen Cäsiumlinien, der andere (aus Glas *O* 118, der Liste von Schott u. Genossen) noch fürs erste ultraviolette Paar brauchbar ist. Die Dispersion wurde jedesmal bestimmt durch Photographieren der zwei Cäsiumlinien in einer Röhre mit geringem Druck. Sie war ziemlich groß, nämlich bei $\lambda = 4555 \text{ Å} \cdot \text{E}$ 0,311 mm bzw. mit Vergrößerung 0,702 mm pro $\text{Å} \cdot \text{E}$ und bei $\lambda = 3877 \text{ Å} \cdot \text{E}$ 0,326 mm pro $\text{Å} \cdot \text{E}$.

Trotzdem betrug die Expositionsduauer nur 15—20 Minuten bei $\frac{1}{100}$ mm Spaltweite im Fall der blauen Cäsiumlinien. Hier, bei den blauen Linien, sind alle der größten Lichtstärke bei großer Dispersion günstigen Bedingungen erfüllt: die große Trennung, die mit Rücksicht auf das Korn und die ungleichmäßigen Körnerhäufungen der photographischen Platte beim photographischen *Photometrieren* weiter getrieben werden muß,

als für okulare Beobachtungen oder Ausmeßplatten, ist in erster Linie erreicht durch Anwendung der eben noch nach ihrer Absorption zulässigen Schwere des Flintglases. Erst in zweiter Linie wird noch im Verhältnis 2:1 vergrößert, da dies ja, im Gegensatz zur Prismendispersion, das Licht quadratisch schwächt.

Die Nernstlampe, die hier *nicht* völlig konstant zu sein braucht, wurde zur Erzielung höherer *spezifischer* Helligkeit etwas überlastet. Die Temperatur im Ofen *O* wurde infolge der speziellen Bauart des Ofens sehr konstant: Innen sorgte ein 4 cm weiter, 24 cm langer, 5 mm dicker Kupferzylinder für Ausgleichung durch seine Wärmeleitfähigkeit. Nach außen schließen sich zwei durch Glasfenster verschlossene Messingröhren mit gesonderter Wickelung an. Es wird dadurch ermöglicht, allerdings nach sehr langer und sorgfältiger Regulierung, die Temperatur an den Röhrenenden um $1/4$ bis höchstens $1/2$ Grad über derjenigen der Mitte zu halten, was die Bildung eines Cäsiumbeschlagens an den Röhrenenden verhütet. Zeitlich war die Temperatur dann bis zu 10 Stunden auf $1/4$ Grad konstant. Die Messung der Temperatur erfolgte durch Silber-Konstantanthermoelemente, mit Hilfe eines Siemens'schen Zeigergalvanometers. Genauigkeit $1/10$ Teilstrich = $0,2 - 0,25^\circ$. Die zweite Lötstelle war stets in Eis. Die Eichung geschah durch Eintauchen in Eis, siedendes Wasser, siedendes Anilin (angenommen zu $183,5^\circ$) und schmelzendes Zinn ($231,85^\circ$). Das eine Thermoelement zeigte bei 100° Differenzen von $1/10$ Teilstrich beim 20 cm tieferen Eintauchen ins Dampfbad. Man erkennt daraus, daß bei genauen Messungen diese augenscheinlich von Inhomogenitäten herrührenden Thermokräfte Beachtung erfordern. Es wurde deshalb das Element beim Eichen genau so weit, wie beim Versuch, eingetaucht. Das andere Element war frei von solchen Differenzen.

Das Schema der Aufnahmeplatten zeigt Fig. 4. Der großen Dispersion wegen mußten für die zwei Linien des Cäsiumpaars zwei gesonderte Aufnahmen gemacht werden. In der Mitte der Platte sind die Stücke des kontinuierlichen Spektrums, möglichst gleich lang zu beiden Seiten der Absorptionslinie *a*, und zwar so lang, daß, wie mit dem Photometer festgestellt wurde, zwischen der Linie und dem Abfall

am Rande noch ein genügendes von Absorption freies Stück liegt. Die Streifen sind, entsprechend der Breite des Nernstfadens und der angewandten Vergrößerung der Linsen und des Apparates ca. 1—2 mm breit. Jede Aufnahme wurde in der Regel dreimal (bei den ganz langen Expositionszeiten nur zweimal) wiederholt. Dabei wurden die erste und zweite Aufnahme dicht untereinander, die dritte durch Verschieben der Kassette an eine ganz andere Stelle der Platte gelegt. Dies war erwünscht, um im Fall eines Plattenfehlers sicher etwas Brauchbares zu haben.

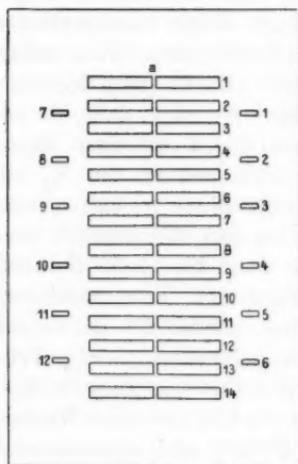


Fig. 4.

Zum Beispiel gehören in Fig. 4 Nr. 1, 2 und 8 zusammen. Die (meist 6) Intensitätsmarken wurden doppelt gedruckt, und zwar zu beiden Seiten der Streifen. Die Werte von $(nx)_m$, die aus drei solchen identischen Aufnahmen berechnet wurden, zeigten nie größere Abweichungen vom Mittel als 1—3 Proz., und zwar 3 Proz. nur in ganz seltenen Fällen. Das Format war 5×8 cm; es wurde aus 9×12 cm geschnitten, so daß man sicher war, keine gegossenen Ränder zu haben, die ja in ihrer Schwärzung abweichen.

Als Platte wurde die vorzüglich gleichmäßige Schleußner-Ultrarapid-, später aber hauptsächlich die erheblich empfindlichere Lumière-Violett-Etikettplatte benutzt. Das sehr gute Übereinstimmen der weit auseinander liegenden Intensitätsmarken ist ein quantitativer Beweis für die Gleichmäßigkeit dieser Platten. Die nach der Entwicklung bisweilen sichtbaren Plattenfehler waren so selten und so klein, daß niemals eine Platte deshalb unbrauchbar war.

Nachdem die Platten 2—3 Minuten in Wasser aufgeweicht waren, was nach Schell¹⁾ die andernfalls durch

1) C. Schell, Ann. d. Phys. 35, p. 695. 1911.

Diffusionsunterschiede auftretende Randerscheinung verhindert, wurden sie mit folgendem Entwickler 10 Minuten entwickelt:

8 ccm konz. Glycinentwickler,
32 ccm Wasser,
10 Tropfen KBr 1:10.

Dabei trat die gewünschte schwache Schleierung ein. Nach normaler Fixierung wurde 2—3 Stunden gewässert.

Als Photometer wurde teils das Hartmannsche, teils das Kochsche¹⁾ registrierende Photometer benutzt. Hr. Koch war so liebenswürdig, zu gestatten, daß unsere Platten auf seinem Instrument registriert wurden, wofür wir ihm bestens danken möchten. Die Registrierung führte Herr Universitätsmechaniker Hörtensteiner mit großer Sorgfalt aus, wie am guten Über-einstimmen gleicher Intensitätsmarken zu erkennen war. Je nachdem der Spektrograph mit oder ohne die zweifache Vergrößerung benutzt wurde, wurden beim Hartmannschen Photometer zwei verschiedene Mikroskopobjektive verwendet, derart, daß das durch den Spiegel des Photometerwürfels ausgeblendete Stück am Ort der Platte einem Rechteck von $0,05 \times 0,26$ mm, bzw. $0,025 \times 0,13$ mm entsprach. Beim Kochschen Instrument waren die angewandten Spalte, auf den Plattenort bezogen, $0,045 \times 0,7$ mm, bzw. $0,025 \times 0,4$ mm. Neben der außer-ordentlichen Zeitersparnis und der Objektivität seiner Angaben besitzt das Kochsche Photometer noch einen prinzipiellen Vorteil, auf den wir hier hinweisen möchten: Die Breite des auszublendenden Rechtecks, in Richtung der Dispersion genommen, ist durch die Variation der Schwärzung der Erscheinung in dieser Richtung begrenzt und bei beiden Photometern gleich. Die Höhe dagegen ist nur durch die von Licht erfüllte Spaltlänge des Spektrographen gegeben und kann eventuell sehr groß gegen die Breite genommen werden. Beim Hartmannschen Photometer wird dieses Verhältnis höchstens 10:1 genommen, mehr könnte das Auge bei der Beurteilung der Helligkeit dieses Streifens nicht ausnutzen, auch bei dieser Länge ist der Gewinn an Sicherheit gegenüber 5:1 nur gering. Das Kochsche Instrument dagegen, wie jedes lichtelektrische,

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 39. p. 705. 1912.

integriert über den Streifen, so daß aus den örtlichen Ungleichmäigkeiten (Körnerhäufungen) das Mittel vom Instrument selbst genommen wird. Solche Häufungen hat ja auch die beste Platte, nur das Mittel über einen nicht zu kleinen Bereich ist konstant. Also kann man beim Kochschen Photometer durch *Verlängerung* des Spaltes die Sicherheit erhöhen. Dieser Umstand war bei unseren Aufnahmen nur beschränkt ausnutzbar wegen der geringen Höhe des gleichmäßig geschwärzten Teiles unseres kontinuierlichen Spektrums. Der Nernstfaden mußte horizontal genommen werden, weil der erste Spalt (am Vorderlegungsapparat) ca. $\frac{3}{4}$ mm weit sein mußte, um die richtige Breite des kontinuierlichen Spektrums zu geben, d. h. einen genügend großen Spektralbezirk im Spektrographen erscheinen zu lassen. Der vertikale Nernstfaden hätte den Spalt nicht genügend gleichmäßig von rechts nach links erfüllt, was einen Abfall der Helligkeit im kontinuierlichen Spektrum, also einen praktisch sehr störenden Fehler bedingt hätte.

Die Angaben beider Photometer für $(n\alpha)_m$ stimmten befriedigend überein, indem für diese Größe höchstens um 5 Proz., meist nur um ca. 3 Proz. differierende Werte gefunden wurden.

Da das Kochsche Photometer gegenüber dem Hartmannschen den Nachteil stärkerer Krümmung der Intensitätsmarkenkurve hat, also einen kleineren Meßbereich, so mußten die Schwärzungen und die Lage der Intensitätsmarken sehr richtig getroffen werden. Dies führte bei der *während der Versuchsreihen* durch Entstehen eines Metallbeschlagens variierenden Intensität zu großen Schwierigkeiten, indem die vorher genau ausprobierten Marken hinterher doch nicht die richtige Lage relativ zur Intensität der Aufnahme der Erscheinung hatten. Sicher brauchbare Aufnahmen wurden erst erhalten, als durch sorgfältigste Regulierung während des viele Stunden dauernden Anheizens der Beschlag bis auf Spuren vermieden wurde.

Ausführung der Versuche.

Nach dem Einbringen der Versuchsröhre in den Ofen mußte man, da sie wie eine Linse wirkte, trotz des absichtlich dünnen Glases, die Abbildung der Nernstlampe auf den ersten Spalt neu in Ordnung bringen und die Erfüllung aller Apparate mit Licht prüfen. Die wichtige Einstellung des

Spektrums auf den zweiten (Spektrographen-) Spalt bewirkte man mit dem Auge, so daß in einem auf eine am Plattenort befindliche Glasscheibe eingestellten Okular das kontinuierliche Spektrum seitlich scharf begrenzt war. Die Fokussierung des Spektrographen geschah photographisch. Als Lichtquelle diente hierbei die Bogenlampe. Geringe Verunreinigungen in den Kohlen gaben sehr scharfe Linien, ihre Breite wurde mit dem Komparator gemessen. Die große Intensität des Bogens erlaubte sehr kurze Expositionszeiten, so daß die zahlreichen Aufnahmen in nicht allzu langer Zeit erledigt werden konnten. Besonders günstig war bei den Aufnahmen des ersten ultravioletten Cs-Linienpaares ihr Zusammenfallen mit der vierten Gruppe der Cyanbanden. Die große Helligkeit dieser Bandenlinien ermöglichte es, den Strahlengang im Spektrographen leicht einzustellen und zu prüfen; das Spektrum der bei den Aufnahmen verwendeten Nernstlampe war unsichtbar. Die Breite einer scharfen Linie war ca. 0,07 mm, was einer nicht völligen Erreichung der theoretischen Auflösung des Prismenapparates, am wahrscheinlichsten in der Glasbeschaffenheit begründet, entspricht. Das Objektiv war nach verschiedenen Methoden geprüft und gut befunden.

Die Temperatur im Ofen wurde bei den wichtigsten Aufnahmen über Nacht eingestellt und blieb dann, nachdem man noch einige Stunden gewartet und reguliert hatte, tagsüber auf $1/10$ bis $1/20$ Teilstrich konstant, wenn größere Schwankungen der Zimmertemperatur vermieden wurden. Die Windungen des bifilar gewickelten Ofens gaben ein sehr schwaches magnetisches Feld am Ort der Röhre, so daß daraus auf keinen Fall eine Störung entstehen konnte. Wenn mit dem erwähnten Hebegefäß ein neuer Druck des Stickstoffs eingestellt worden war, wurde immer wenigstens 5 Minuten bis zur Aufnahme gewartet. Daß dies zur Sättigung längst genügte, beweist die vollkommene Identität der ersten und der nach mehr als 10 mal so langer Zeit geschlossenen dritten Aufnahme.

Die Unterbringung des Spektrographen in dem vom Raum der Lichtquelle und des Ofens getrennten Zimmer mit konstanter Temperatur war besonders wegen der stark dispergi-

renden und temperaturempfindlichen Prismen angenehm, da die langsame und ungleichmäßige Erwärmung der dicken Glasstücke leicht zu Unschärfe Anlaß geben könnte. Die Temperatur schwankt während 24 Stunden, wenn niemand länger in dem Raum verweilt, um höchstens $1/10$ Grad (Kontrolle durch den Thermographen). Diese Konstanz ist erreicht durch das einfache Mittel¹⁾, daß das Zimmer mit zwei Wänden in ein anderes hineinragt, während die zwei nach dem Gang zu liegenden Wände und die Thür doppelt sind.

Die Entwicklung wurde zur Sicherheit erst am nächsten Tag vorgenommen, damit die Zeit von der Aufnahme der Erscheinungen und der Intensitätsmarken bis zur Entwicklung keine zu großen relativen Verschiedenheiten aufwies. Überdies scheinen Abweichungen von dem Satz, daß gleicher Intensität gleiche Schwärzung entspricht, wenn überhaupt, so nur bei ganz extremen Unterschieden der von der Belichtung bis zur Entwicklung verflossenen Zeit aufzutreten.

Ergebnisse.

1. Prüfung der Druckabhängigkeit von ν' und $(n z)_{mz}$ d. h. von Dämpfung und Teilchenzahl.

Da die Arbeit unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Lorentzschen Stoßtheorie unternommen war, so sollten vor allem deren Hauptforderungen geprüft werden.

Lorentz hatte die Theorie nur auf Fälle angewandt, wo die Hauptmenge der Zusammenstöße vom absorbierenden Gas selbst herrührte, und hatte die Störungszahl groß gegen die Zahl der Molekularstöße gefunden. Dagegen wandte Füchtbauer²⁾ die Theorie auf den Fall an, daß die Zusammenstöße des absorbierenden Moleküls mit gleichartigen Molekülen an Zahl verschwinden gegenüber den Zusammenstößen mit einem fremden, chemisch indifferenten Gas. Es wurde damals unter Anwendung eines kleinen Stufengitters gezeigt, daß die Bandenlinien von Brom und Jod, die durch diese Beobachtungsmethode zum erstenmal so weitgehend getrennt werden konnten, in der Tat durch ein fremdes Gas ver-

1) Vgl. O. Wiener, Institutsbeschreibung, Phys. Zeitschr. 7. p. 1. 1906.

2) Chr. Füchtbauer, l. c.

breitert werden, und daß das durch die qualitativen Beobachtungen in ziemlich enge Grenzen eingeschlossene Halbwertsintervall ν' , bzw. die daraus berechenbare Störungszahl von der Zahl der Zusammenstöße der Jodmoleküle mit den Stickstoffmolekülen von gleicher Größenordnung ist. (Die Überschlagsrechnung, auf Grund deren das damals ausgesprochen wurde¹⁾, wird weiter unten mitgeteilt werden, weil genauere Beobachtungen als die damals angestellten für Bandenlinien noch nicht vorliegen.)

Daß für die Dämpfung, wie häufig bei Flammen angenommen wurde, die Dichte des absorbierenden Stoffes selbst maßgebend ist, ist nicht mehr zu erwarten, sobald ein fremdes Gas zugegen ist, dessen Dichte groß gegen jene des absorbierenden Stoffes ist. Vielmehr sollte, falls die Zahl der dämpfenden Störungen Z proportional der Zahl der Zusammenstöße ζ ist, ν' proportional der Dichte des fremden Gases und der \sqrt{T} oder, wenn man den Druck statt der Dichte mißt, proportional p/\sqrt{T} sein, wo p der Druck des fremden Gases ist. Denn nach (3) ist $\nu' = 2Z$ und ζ ist proportional der Dichte und der Molekulargeschwindigkeit, diese aber proportional \sqrt{T} .

Wir haben nun viele Aufnahmen gemacht in der Weise, daß bei konstanter Temperatur (also auch konstantem Dampfdruck) der Druck mit dem Hebegefäß von 1180 mm Quecksilber auf den doppelten Betrag 2360 mm gesteigert wurde. Es hat sich dabei die vermutete Proportionalität mit dem Druck im allgemeinen bestätigt. Im einzelnen ergaben sich bei der Steigerung aufs Doppelte Abweichungen bis zu 14 Proz. Das war auffallend, da das Halbwertsintervall bei den drei identischen Messungen einer Platte durchweg recht gut (bis auf höchstens 5 Proz.) übereinstimmt, z. B. 24,0, 24,0, 25,0 mm auf der Registrierplatte. Da aber gleichzeitig das benutzte Kochsche Photometer im Halbwertsintervall Abweichungen vom Hartmannschen in der Größe der größten Abweichungen der Werte von der Theorie gab, so muß man sagen, daß das Druckgesetz innerhalb der Fehlergrenzen stimmt, daß aber diese Fehlergrenzen noch etwas größer als nötig sind und

1) l. c. p. 722, Anm. 2.

die benutzte Methode der Plattenausmessung noch zu kontrollieren ist hinsichtlich der Angaben bezüglich der Dimensionen in der Wellenlängenachse. Die Angaben beider Photometer für $(n\alpha)_m$ stimmten innerhalb der normalen Fehlertoleranzen überein (4,5 Proz. im $(n\alpha)_m$ als höchste Abweichung).

Zu einer genaueren Prüfung des Druckgesetzes gelangen wir daher beim $(n\alpha)_m$. Das Ergebnis war hier, daß $(n\alpha)_m$ dem Gasdruck umgekehrt proportional ist. Dieses wichtige Gesetz war stets genügend erfüllt. Die Abweichungen gingen bis 10 Proz. in wenigen ungünstigen Fällen, für eine Druckänderung von 1180—2360 mm, also um 100 Proz. Bei Beschränkung auf die zwei höchsten Drucke 1575 mm und 2360 mm blieben die Abweichungen fast stets unter 5 Proz. bei Druckänderung wie 2:3.

Die höchsten Drucke mußten ja als die zuverlässigsten gelten, weil hier die Breite der Linie weit größer ist, als die vom Apparat nicht aufgelöste Breite (Breite einer unendlich scharfen Linie auf der mit dem Apparat exponierten photographischen Platte). Es wurde die von Voigt¹⁾ entwickelte Formel probiert, um die gemessenen Intensitäten in diesem Sinn auf wahre zu reduzieren. Die Formel lautet, wenn I die wahre Intensität, W die an der Stelle x gemessene Intensität und 2δ die Breite des Spaltbildes in der Ebene der Aufnahme:

$$I = W - \frac{1}{6} \delta^2 \cdot \frac{d^2 W}{dx^2} .$$

Es ergab sich so für die Stelle größten $d^2 W/dx^2$ (größter Krümmung), nämlich für die Stelle stärkster Absorption beim (nur selten angewandten) tiefsten Druck, also im ungünstigsten Fall, eine Korrektion von ca. 2 Proz. für $(n\alpha)_m$. Für den Druck $3\frac{1}{9}$ Atm. nur 1 Proz. Fürs Verhältnis beider gibt das nur eine Korrektion von $\frac{1}{2}$ Proz., ist also bei der Prüfung ganz zu vernachlässigen. Es wurden deshalb die Korrekturen nach dieser Voigtschen Formel nicht angebracht, um so mehr, als diese eigentlich nur für rechteckige Form der idealen Linie (plötzliches Abfallen der Intensität derselben auf Null) gilt. Sie ist ja eigentlich nur zur Berücksichtigung endlicher Spaltweite

1) W. Voigt, Phys. Zeitschr. 14. p. 378. 1913.

abgeleitet. Bei uns war aber die Spaltweite, mit der Vergrößerung multipliziert, nur ein Bruchteil der Breite der zum Fokusieren verwandten scharfen Linie auf der Platte. Wir werden demnächst die Intensitätsverteilung einer idealen Emissionslinie für unseren Apparat bestimmen und dann eine Formel ableiten können, mit der die Angaben *exakt* zu reduzieren sind.

Einstweilen kann man sagen, daß für den Druck $3\frac{1}{9}$ Atm. die gefundene Intensitätsverteilung nur wenig von der wahren abweicht.

Im folgenden führen wir eine unserer vielen Tabellen an, als Beweis der vorzüglichen Übereinstimmung der dem $(n\alpha)_m$ proportionalen Größe $\log \frac{I_0}{I_m}$ für die drei unter identischen Bedingungen gemachten Aufnahmen.

Cs 4555,44 Å.-E. $t = 129,76^\circ$ (Platte 46).

Druck (mm Hg)	Nr.	$\log \frac{I_0}{I_m}$	Proz. durchgelassen	$(n\alpha)_m$
2360	5.	0,39482		
	11.	0,39977		
	12.	0,38186		
	Mittel:	0,39198	40,5	$3,27 \cdot 10^{-7}$
1575	6.	0,63342		
	13.	0,59881		
	14.	0,59409		
	Mittel:	0,60877	24,6	$5,08 \cdot 10^{-7}$

Nr. 5, 11, 12 sind auch mit dem Hartmannschen Photometer ausgemessen. Die Zahlen für $(n\alpha)_m$ sind dabei: 3,15, 3,13, $3,11 \cdot 10^{-7}$, Mittel $3,13 \cdot 10^{-7}$, also genügend mit obigem Wert übereinstimmend, unter sich aber noch viel besser.

Also scheint der obige Satz, daß $(n\alpha)_m$ dem Druck umgekehrt proportional ist, genügend gesichert.¹⁾ Dies führt zu dem Schluß, daß

1. ν' dem Druck proportional ist, wie oben, minder genau, direkt gefunden;

2. daß die Zahl der schwingungsfähigen Elektronen \mathfrak{N} vom Druck unabhängig ist.

1) Die Prüfung des Druckgesetzes in einem größeren Intervall und mit größerer Genauigkeit wird unsere Hauptsorge sein.

Fredenhagen¹⁾ hat vor einiger Zeit starke Zunahme der Zahl der schwingungsfähigen Teilchen mit wachsendem Druck des neutralen Gases bei Natrium mittels Absorption und Dispersion gefunden. Einige nicht ausmeßbare Photographien von Absorptionslinien schienen uns diese Mitteilung zu bestätigen, doch wurde gleichzeitig darauf hingewiesen²⁾, daß ein Schluß aus der Absorption viel größere Auflösung und genauere photometrische Untersuchung erfordere, um als einigermaßen sicher gelten zu können. Wir sehen aus obigem, daß von einer Zunahme und überhaupt einer Änderung der Zahl mit dem Druck des indifferenten Gases in dem bisher untersuchten Gebiet (um Atmosphärendruck herum) nichts zu bemerken ist. Bei diesem Druck ist also jedenfalls die Elektronenzahl innerhalb der Fehlerngrenzen konstant³⁾ und die Eignung dieses Gebiets zur Vergleichung der verschiedenen Serienlinien ist erwiesen. Letzteres erscheint uns als eine Hauptaufgabe.

2. Reproduzierbarkeit der Absorptionswerte.

Eine Röhre gab für $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$, $p = 2360 \text{ mm}$ zunächst (Platte 34, Nr. 7 u. 8, $t = 122,2^0$) den Wert $(n\alpha)_m = 2,14 \cdot 10^{-7}$. Nachdem sie dann mehrere Monate zu den verschiedensten Versuchen benutzt worden und Hunderte von Stunden im Ofen gewesen war, wurde sie wieder, mit der inzwischen verbesserten Methode, d. h. doppelter Vergrößerung des Spektrums untersucht (Platte 46, Nr. 1, 2, 7; $t = 122,78$). Es ergab sich $(n\alpha)_m = 2,13 \cdot 10^{-7}$. Die Übereinstimmung beweist, daß wir vollkommen reproduzierbare physikalische Konstanten gewonnen haben, die mit chemischen Reaktionen, welche von anderer Seite angenommen werden, jedenfalls nichts zu tun haben. Die nach-

1) C. Fredenhagen, Phys. Zeitschr. 12. p. 401 u. 911. 1911.

2) Chr. Füchtbauer, l. c.

3) Herr Fredenhagen hat nach Anhörung des die obige Darstellung enthaltenden Wiener Vortrags (25. Sept.) eine Berichtigung veröffentlicht (Phys. Zeitschr. 14. p. 1047. 1913, eingegangen 1. Okt.), in der er der in dem Vortrag geäußerten Ansicht, daß eine Änderung der Teilchenzahl mit wachsendem Druck des neutralen Gases in keinem Fall nachweisbar ist, sich anschließt. Auf Grund eigner qualitativer Versuche zeigt er, daß aus seinem früheren Experimenten infolge Kondensation des Dampfes an den kalten Röhrenenden nichts geschlossen werden kann. (Anmerkung bei der Korrektur.)

gewiesene Reproduzierbarkeit gestattet erst den sicheren Vergleich der Serienlinien zu verschiedenen Zeiten.

3. Verhältnis der zwei Linien eines Paars.

Bei der schwächeren Linie des blauen Cäsiumpaars $\lambda = 4593,39 \text{ Å.-E.}$ wurde für $t = 148,9^\circ$ gefunden: $p = 1600 \text{ mm}$, $\nu' = 3,78 \cdot 10^{11}$. Bei der nur wenig davon verschiedenen Temperatur $144,86^\circ$, wurde $3,66 \cdot 10^{11}$ gefunden, in sehr guter Übereinstimmung. Rechnet man das mittels $\sqrt{T_1/T_2}$ um auf $t = 129,76^\circ$, so erhält man $\nu' = 3,85 \cdot 10^{11}$. Bildet man das Mittel aus allen Werten, die wir für die andere Linie $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ bei dieser Temperatur fanden, so ergibt sich $\nu' = 4 \cdot 10^{11}$. Ferner gibt die im folgenden benutzte Aufnahme der zwei D-Linien von Füchtbauer und Schell für $\lambda = 5896 \text{ Å.-E.}$ $\nu' = 3,68 \cdot 10^{11}$ und für $\lambda = 5890 \text{ Å.-E.}$ $\nu' = 3,46 \cdot 10^{11}$.

Also haben wir den Satz:

Die Dämpfung ist für die beiden Linien eines Paares gleich innerhalb der Fehlergrenzen.

Erweist sich dieser Satz als streng gültig bei vergrößerter Genauigkeit, so ist er wertvoll für die magnetische Koppelungstheorie von Voigt¹⁾, die nur für diesen Fall bisher auszurechnen war.

Das Verhältnis von $(n\alpha)_m$ ergibt sich für die zwei Linien des Paares als 3,05.

Für das Verhältnis der zwei Natriumlinien wurde bei Emission von Flammen von Gouy²⁾ 1,9 und 2 gefunden und auf die Ganzzahligkeit hingewiesen. Dieser Wert 2 wurde 1912 von Füchtbauer und Schell mittels der hier angewandten Methode und von Roschdestwensky³⁾ mittels Dispersion bestätigt.

Füchtbauer und Schell fanden auf Platte 71, Aufnahme 4 für $\lambda = 5890,2 \text{ Å.-E.}$ $(n\alpha)_m = 4,24 \cdot 10^{-7}$, für $\lambda = 5896 \text{ Å.-E.}$ $(n\alpha)_m = 2,09 \cdot 10^{-7}$. Nimmt man, wie dies innerhalb der Fehlergrenzen zutrifft, ν' für beide Linien gleich, so folgt als Verhältnis der Elektronenzahlen 2,03, also von 2 nur um 1 Proz. verschieden.

Ferner fand Gouy (l. c.) für das Verhältnis der violetten

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 42. p. 210. 1913.

2) M. Gouy, Ann. d. chim. et phys. (5) 28. p. 70. 1879.

3) D. Roschdestwensky, Ann. d. Phys. 39. p. 307. 1912.

Rubidiumlinien 2,9 und Bevan¹⁾ erhielt mittels Dispersion für das Verhältnis derselben Linien den Wert 3.

Nun ergibt sich aus unseren Versuchen, die allerdings wegen der geringen Absorption der Linie $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}$ bei der für $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ schon reichlich hohen Temperatur hier nicht die Genauigkeit der vorhin mitgeteilten Versuche erreichen, für das Verhältnis der zwei Linien des Paares von Cäsium eine nicht weit von 1:3 abweichende Zahl. Schließen wir aus dieser Übereinstimmung unseres Cäsiumwerts mit dem Rubidiumwert von Gouy, daß für *Alkalihauptserienlinien gleicher Ordnungszahl das Verhältnis gleich* ist, so können wir den Na-Wert 2 auf das Glied $n = 3$ (das erste Glied) der Cäsiumserie übertragen, und kommen zu dem Gesetz der *Abnahme des ganzzähligen Linienverhältnisses* (für die $(n \times)_m$) mit wachsender Ordnungszahl. In der Tat haben uns Versuche mit dem nächsten Paar $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$ und $\lambda = 3889 \text{ Å.-E.}$ der Cäsiumserie gezeigt, daß das Linienverhältnis mindestens 4:1, jedenfalls größer als 3:1 ist. Es sieht also jetzt so aus, als ob hier ein neues, sehr einfaches Seriengesetz vorläge, des Inhalts, daß das Verhältnis der Zahl der schwingungsfähigen Teilchen in der kurzweligen und der langwelligen Linie eines Paares $(n - 1):1$ für das Glied mit der Kayserschen Ordnungszahl n wäre. Da dieses Gesetz auf Grund noch nicht ausreichenden Materials nur vermutungsweise ausgesprochen werden kann, ist seine Prüfung an mehreren Linien der Cs-Serie, die mit unseren Methoden ohne weiteres ausführbar ist, in Angriff genommen.

4. Vergleich der absoluten Zahl der Zusammenstöße mit der Störungszahl.

Dieser Vergleich soll durchgeführt werden bei einer Cs-Linie $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ und bei der Na-Linie $\lambda = 5890 \text{ Å.-E.}$

Das genaueste Beobachtungsmaterial ist für die Cäsiumlinie vorhanden. Nach Formel (74) in Boltzmanns Vorlesungen über Gastheorie ergibt sich für die Zahl ζ der Zusammenstöße eines Cäsummoleküls m mit n_1 Stickstoffmolekülen m_1 pro Volumen- und Zeiteinheit:

$$\zeta = 2 \sigma^2 n_1 \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{m + m_1}{h m m_1}},$$

1) P. V. Bevan, Proc. of the Roy. Soc. 85. p. 66. 1911.

wo σ die Summe der zwei Molekülradien und h die Konstante in Maxwell's Geschwindigkeitsverteilungsgesetz. Ist noch nach (44)

$$\frac{1}{h m} = \frac{2}{3} \overline{c_m^3},$$

so wird

$$\zeta = 2 \sigma^2 n_1 \sqrt{\pi} \sqrt{\overline{c_m^3}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{m + m_1}{m_1}}.$$

Ferner ist

$$n_1 = \mathfrak{N}_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = \mathfrak{N}_0 \frac{p}{760} \frac{273}{T},$$

$$\overline{c_m^3} = \overline{c_0^3} \frac{m_{H_2}}{m} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Dabei ist $\overline{c_0^3}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat des Wasserstoffmoleküls, m_{H_2} dessen Masse. Also

$$\zeta = 2 \sigma^2 \mathfrak{N}_0 \frac{p}{760} \sqrt{\overline{c_0^3}} \sqrt{\frac{2}{3} \pi m_{H_2} \frac{m + m_1}{m m_1} \frac{T_0}{T}}.$$

Für die Loschmidt'sche Zahl \mathfrak{N}_0 wurde unter Berücksichtigung des zurzeit wahrscheinlichsten Wertes der Strahlungskonstanten gesetzt $\mathfrak{N}_0 = 2,77 \cdot 10^{19}$.

Für den Molekulardurchmesser des Stickstoffs gibt Landolt-Börnstein den Wert $3,0 \cdot 10^{-8}$ cm, für das einatomige Xenon, dessen Molekulargewicht dem des Cäsiums gleich ist, den nämlichen Wert. Es wurde deshalb der Molekulardurchmesser des Cäsiums (ebenso wie in den späteren angenäherten Rechnungen der des Natriums und des Jods) auch gleich $3 \cdot 10^{-8}$ gesetzt. Also

$$\sigma = 3,0 \cdot 10^{-8};$$

ferner

$$m = 133; \quad m_1 = 28; \quad m_{H_2} = 2.$$

Bei dem Absorptionsversuch war gefunden für $\lambda = 4555 \text{ Å} \cdot \text{E.}$

$$t = 129,76^\circ \quad (T = 402,76^\circ); \quad p = 2360 \text{ mm}; \quad \nu' = 6,4 \cdot 10^{11}.$$

(Der Wert von ν' wurde als Mittelwert dieser Aufnahme genommen, welche in jeder Beziehung gut war.) Obige Formel liefert für diesen Fall:

$$\zeta = 1,00 \cdot 10^{10},$$

$$Z = \frac{\nu'}{2} = 3,2 \cdot 10^{11}.$$

Also ist die Zahl der dämpfenden Störungen in diesem genau berechenbaren Fall 32 mal so groß als die Zahl der aus der

Gastheorie berechenbaren Zusammenstöße. Hält man die benutzten theoretischen Beziehungen für völlig exakt, so kann man z. B. die Folgerung ziehen, daß der Wirkungsradius, auf den genähert ein Molekül die Elektronenschwingungen eines anderen stört¹⁾, etwa $\sqrt{32} = 5,6$ mal so groß ist wie die Distanz, bei deren Erreichung es das andere aus seiner Bahn merklich ablenkt.

Führt man die gleichen Rechnungen an der von Füchtbauer und Schell mit ein wenig geringerer Genauigkeit durchgemessenen Natriumlinie $\lambda = 5890 \text{ Å.-E.}$ aus, so erhält man folgende Zahlen: Druck 1733 mm, $t = 174,3^\circ$, also $T = 447,3^\circ$, $\nu' = 3,46 \cdot 10^{11}$. Mit diesen Daten wird für $\sigma = 3 \cdot 10^{-8}$:

$$\zeta = 0,94 \cdot 10^{10},$$

$$\text{Störungszahl } \frac{\nu'}{2} = 1,73 \cdot 10^{11}.$$

Also ist hier die Störungszahl 18 mal so groß, als die Zahl der Zusammenstöße. Der von H. A. Lorentz bei seiner Berechnung nach Versuchen von Hallo gefundene ca. zehnmal so große Wert des Verhältnisses der Störungszahl zur Stoßzahl scheint kaum zulässig.

Es sei darauf hingewiesen, daß das Verhältnis für die gelbe Natriumlinie etwas kleiner ist, als für das Cäsiumpaar. Doch müssen erst genauere Daten, besonders für die gas theoretische Größe σ , sowie Messungen an mehr Linien vorhanden sein, damit man hierin eine Gesetzmäßigkeit erblicken kann. Messungen an der ultravioletten Cäsiumlinie $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$, deren Genauigkeit indessen noch nicht genügend ist, schienen einen etwas größeren Wert für ν' zu liefern, als die erwähnten Messungen an dem Paar $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ und $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}$, also ein geringes Wachstum der Dämpfung mit wachsender Ordnungszahl anzudeuten. Genaue Bestimmungen an dieser Linie sind im Gang.

1) Nimmt man an, daß diese Störungen elektrische Fernwirkungen der vorbeifliegenden Moleküle sind, so liegt die Vermutung nahe, daß Stoffe, die nach Debye fertige Dipole enthalten, stärker, d. h. bei geringerer Dichte, dämpfend wirken könnten, als solche ohne Dipole. Ein Versuch ergab aber ein durchaus negatives Resultat, indem Wasserdampf, nach der l. c. beschriebenen Methode mit dem Stufengitter untersucht, bei den Bandenlinien des Jodes jedenfalls keine der Größenordnung nach stärkere Dämpfung gab als Luft.

Schließlich sei noch die früher für die Jodbandenlinien ausgeführte Überschlagsrechnung mitgeteilt. In diesen Röhren mit Jod und Stickstoff von Atmosphärendruck wird bei ca. 40° die Absorption eine normale, d. h. eine solche, die nach okularer Schätzung den meßbaren Natriumabsorptionen entsprechen könnte. Dabei fließen Jodlinien zusammen, deren Abstand ca. $0,09 \text{ \AA-E.}$ ist. Rechnet man also die Halbwelte gleich ca. $0,1 \text{ \AA-E.}$, so wird $\nu' = \text{ca. } 0,6 \cdot 10^{11}$.

Die obige Formel gibt

$$\zeta = 0,36 \cdot 10^{10},$$

$$\frac{\nu'}{2} = 0,3 \cdot 10^{11}.$$

Diese Rechnung, auf Grund deren seinerzeit auf die im Gegensatz zu den bis dahin gebrachten Beispielen vorhandene nahe Übereinstimmung zwischen Störungszahl und Stoßzahl hingewiesen wurde¹⁾, gibt also für die Störungszahl einen ca. achtmal so großen Wert, als für die Zahl der gastheoretischen Zusammenstöße. Die Fehler können sich wohl bei dieser Schätzung auf einen Faktor 4 belaufen. Genauere Bestimmungen der Halbwertsbreite, die allerdings wegen der Nähe der Bandenlinien etwas schwieriger sind, sind in Aussicht genommen.

5. Vergleich der Zahl der absorbierenden Elektronen mit der Zahl der Dampfmoleküle.

Der Vergleich der Zahl der Elektronen mit derjenigen der Dampfmoleküle ist wichtig, weil er einen Schluß auf die Natur der Träger des schwingenden Elektrons gestattet. Die Zahl der Elektronen \mathfrak{N} berechnen wir mit Hilfe der Formeln

$$(6) \quad \mathfrak{N} = \frac{\varrho}{4 \pi e \frac{e}{m}}$$

und

$$(7) \quad \varrho = 2 \nu_0 \nu' (n \mathfrak{x})_m.$$

Die Zahl der Gasmoleküle (bei den Metalldämpfen Atome) ist beim Dampfdruck p' :

$$(8) \quad n = \mathfrak{N}_0 \frac{p'}{760} \cdot \frac{273}{T}.$$

1) Chr. Füchtbauer, l. c. p. 722, Anm. 2.

Wegen der Wichtigkeit der Kenntnis der Alkalidampfdrucke für dieses Gebiet hat A. Kröner¹⁾ auf Veranlassung von Füchtbauer in einer 1911 abgeschlossenen Untersuchung die Dampfdrucke von Cäsium und Kalium zwischen 0,3 und 6 mm bestimmt. Der hier erforderliche niedrigere Druck p' wurde unter Benutzung der besten Krönerschen Werte (von 1 mm aufwärts) mittels der Hertz'schen Formel²⁾ extrapoliert:

$$\log p' = A + B \log T + \frac{C}{T} .$$

Sie ist ja an Quecksilber ausgezeichnet bestätigt.

Für die molekularen Größen, die Loschmidsche Zahl \mathfrak{N}_0 und die Ladung e wurden folgende Zahlen benutzt:

$$\mathfrak{N}_0 = 2,77 \cdot 10^{19}; e = 4,67 \cdot 10^{-10}; \text{ ferner } e/m = 5,28 \cdot 10^{16} (\text{elektrostat.})$$

Dann gibt Platte 47 Nr. 14 für die schwächere Cäsiumlinie $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}$ folgende Werte:

$$t = 148,9^\circ; p = 1600 \text{ mm}; (n\kappa)_m = 3,90 \cdot 10^{-7}; \nu' = 3,92 \cdot 10^{11}; \text{ daraus}$$

$$q = 1,25 \cdot 10^{31}.$$

Hieraus

$$\mathfrak{N} = 4,03 \cdot 10^{11}$$

und aus dem Dampfdruck $p' = 0,0036 \text{ mm:}$

$$n = 8,49 \cdot 10^{13},$$

$$\frac{n}{\mathfrak{N}} = 210.$$

Für die stärkere Linie des Paars wäre \mathfrak{N} dreimal so groß, also $n/\mathfrak{N} = 70$.

Das Verhältnis der Teilchenzahl der ersten zu derjenigen der zweiten kurzwelligen Serienlinie ist für Cäsium nicht bekannt.³⁾ Wir erinnern uns einstweilen des Umstandes, daß dieses Verhältnis für Rubidium aus Dispersionsmessungen von Bevan⁴⁾ roh zu 100 gefunden wird.

Setzen wir es also für Cäsium ebenfalls von der Größenordnung 100, so ergibt sich:

1) A. Kröner, Ann. d. Phys. 40. p. 438. 1913.

2) H. Hertz, Wied. Ann. 17. p. 198. 1882.

3) Wir werden es demnächst bestimmen können, bisher ist es nur aus Mangel an einem für Ultrarot brauchbaren Apparat unterblieben.

4) P. V. Bevan l. c.

Für das erste Paar der Alkalihauptserien ist das Verhältnis der Elektronenzahl zur Zahl der Dampfatome von der Größenordnung 1.

Das ist schwer zu verstehen, wenn wir nicht den Satz annehmen:

Träger der Hauptserienlinien der Alkalien sind die gewöhnlichen neutralen Moleküle.¹⁾

Daß die Träger der Lichtemission der Alkalihauptserien neutral sein müssen, haben Lenard und später W. Wien schon lange für Flammen und Kanalstrahlen bewiesen.

Die Feststellung, daß Elektronenzahl und Atomzahl von der nämlichen Größenordnung sind bei Einführung reiner Versuchsbedingungen, ist deshalb wichtig, weil bei allen bisherigen Versuchen, insonderheit denen an Flammen und den Dispersionsversuchen im Rohr mit gekühlten Enden, sich stets ergab, daß sich nur ein kleiner Bruchteil der vorhandenen Metallmoleküle an den Leucht- und Absorptionsprozessen beteiligen sollte.

Die obige Zahlenschätzung legt die Vermutung nahe, daß sich für eine der roten Linien $\lambda = 8910 \text{ Å} \cdot \text{E}$. und $R = 8510 \text{ Å} \cdot \text{E}$., und zwar wahrscheinlich für die brechbarere, die Zahl der schwingungsfähigen Elektronen gleich der Atomzahl ergeben wird. Versuche mit dem roten Paare müssen das aufklären.

Messungen an einer Röhre mit hohem Druck.

Um zur Erhöhung der Sicherheit die weite Extrapolation des Dampfdrucks zu vermeiden, bedienten wir uns des folgenden Verfahrens: In dem Gebiet der von Kröner gemessenen Dampfdrucke haben Röhren von normaler Länge viel zu starke Absorption der für uns in Betracht kommenden Linien. Durch Erhöhung des Druckes des Stickstoffs kann man aber die Absorption beliebig herabdrücken, da sie ihm ja nach unseren Messungen umgekehrt proportional ist. Wir füllten deshalb eine Röhre nach dem Hineindestillieren des Cäsums mit Stickstoff und schmolzen ab, während der Stickstoff in dem in flüssigem Wasserstoff steckenden Röhrenende kondensiert war.

1) Es sei nochmals betont, daß gerade diese Schlüsse von der Gültigkeit der Drudeschen und Lorentzschen Formeln durchaus abhängig sind.

Die Röhre hatte im Ofen etwa 25—30 Atm. Druck. In der Tat hatte man im Gebiet der Krönerschen Dampfdrucke einen richtigen Betrag der Absorption. Der Dampfdruck bei der Temperatur $233,25^\circ$ ist 0,223 mm. Es schien genauer, hierzu nicht die kleinsten gemessenen Werte zu verwenden, sondern ihn mit der Hertz'schen Formel aus den Werten über 1 mm zu berechnen. Die Formel hat bei Verwendung von zwei verschiedenen Wertetriplets ganz verschiedene Konstanten, aber beide Formeln liefern für $233,25^\circ$ Dampfdrucke, die auf 2 Promille übereinstimmen. Mit der gleichen Genauigkeit wird das ganze Beobachtungsmaterial von Kröner oberhalb 1 mm durch die zwei Formeln dargestellt.

Gemessen ist die stärkere Linie des ultravioletten Paars $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$ (Die Messung anderer Linien wurde durch das Zerbrechen der Röhre vereitelt.) Hierbei wurde so verfahren, daß außer dem kontinuierlichen Grund mit Linie auch der kontinuierliche Grund ohne Absorptionslinie aufgenommen und photometriert wurde. Der letztere fällt nämlich infolge der Absorption in den Prismen bei dieser breiten Linie schon sehr merklich nach den kürzeren Wellen zu ab. Jede einzelne Ordinate wurde dann auf konstante einfallende Intensität umgerechnet und an der so erhaltenen Kurve $(nx)_m$ und ν' bestimmt. Man erhielt bei Platte 42, Nr. 8:

$$\lambda = 3876,7 \text{ Å.-E.}; \quad t = 233,25^\circ;$$

$$(nx)_m = 3,74 \cdot 10^{-7}; \quad \nu' = 84,86 \cdot 10^{11}; \quad \varrho = 3,07 \cdot 10^{23};$$

daraus:

$$\mathfrak{R} = 9,91 \cdot 10^{12};$$

ferner aus $p' = 0,223 \text{ mm}$:

$$n = 4,38 \cdot 10^{15},$$

$$\frac{n}{\mathfrak{R}} = 442.$$

Nun können wir einen *Temperaturkoeffizienten* für das $(nx)_m$ der Linie $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}$ bestimmen aus folgenden Werten, welche jeweils Mittel aus sechs dem Druckgesetz gut gehorgenden und mittels desselben auf $p = 2370 \text{ mm}$ reduzierten Werten sind:
 $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}; \quad p = 2370 \text{ mm}; \quad t = 144,86^\circ; \quad (nx)_m = 2,254 \cdot 10^{-7};$
 $p = 2370 \text{ mm}; \quad t = 148,92^\circ; \quad (nx)_m = 2,716 \cdot 10^{-7}.$

Es ergibt sich das Verhältnis 1,20:1 bei Zunahme der Temperatur von $144,86^\circ$ um $4,06^\circ$; also eine Zunahme des $(n\alpha)_m$ von 5 Proz. pro Grad bei $144,9^\circ$. Daraus kann man angenähert $(n\alpha)_m$ für $161,9^\circ$ berechnen. Der dreifache Wert gehört dann zu $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ und $t = 161,9^\circ$.

Für diese Temperatur ist nun $(n\alpha)_m$ auch bei der stärkeren Linie des ultravioletten Paars, also $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$, roh gemessen worden. Die Elektronenzahl ist etwa der sechste Teil des entsprechenden Wertes für $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ Da die Temperatur und daher der Dampfdruck für beide Linien bei diesem Vergleich der nämliche war, ist auch der Wert für n/\mathfrak{N} für die Linie $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$ sechsmal so groß, als für die blaue Linie $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ Ist dieses Verhältnis unabhängig von der Temperatur, so erhält man aus dem Wert $n/\mathfrak{N} = 70$ der Linie $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ für die Linie $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$ den angenäherten Wert $70 \times 6 = 420$, wie wir ihn auch direkt in dem Rohr von hohem Druck gefunden (442).

Diese Übereinstimmung zwischen Zahlen, die bei so ganz verschiedenen Gasdrucken (2—30 Atm.) und entsprechend ganz verschiedenen Cäsiumdrucken gewonnen sind, stärkt das Vertrauen in die Theorie und läßt erkennen, daß die Extrapolation der Dampfdrucke wenigstens angenähert richtige Werte gegeben hat. Wäre man des tieferen Dampfdruckes ganz sicher, so würde mit entsprechender Genauigkeit die Unabhängigkeit des Verhältnisses der Elektronenzahlen verschiedener Serienlinien von der Temperatur folgen. Auf die Mitteilung des Zahlenmaterials für die Linie $\lambda = 3877 \text{ Å.-E.}$ haben wir bei obiger Angabe der Resultate verzichtet, weil es demnächst verbessert wird.

Alles in allem sieht man, daß für die Zahl der schwingenden Teilchen lediglich der Dampfdruck maßgebend ist. Es scheint, daß man hierin die einfachste Methode zur Bestimmung sehr kleiner Dampfdrucke der Alkalien besitzt, indem man dieselben nämlich durch starke Variation des Druckes des indifferenten Gases an direkt gemessene höhere Dampfdrucke optisch anschließt.

Die Emission dieser Linien bei entsprechend hoher Temperatur ist natürlich, wie früher erörtert wurde, einfach durch das Kirchhoffsche Gesetz erledigt. In den Fällen, wo keine

Absorption und Emission der Hauptserienlinien eintritt (z. B. Chlorflammen von Mitscherlich) dürfte eben der Partialdruck des *freien* Alkalimetalls zu klein sein.

Berechnung der Elektronenzahl für die *D*-Linien
(nach Versuchen von Füchtbauer und Schell).

Diese Rechnung schien wichtig, weil hier alle Größen am *ersten* Glied der Natriumserie beobachtet sind. Allerdings ist hier eine derartig weite Extrapolation der Dampfdrucke (verwendet haben wir die von Gebhardt¹⁾) nötig, daß wir es vorzogen, statt der Formel von Hertz die Regel von Ramsay und Young zu benutzen. Kröner hat ja ihr gutes Stimmen für verschiedene Alkalien, allerdings in viel kleinerem Bereich, gezeigt. Es ergab sich so bei Verwendung der Dampfdrucke von Quecksilber, die ihrerseits nur ganz wenig nach der Hertz'schen Formel aus Knudsens²⁾ Messungen extrapoliert zu werden brauchten, für den Dampfdruck des Natriums 0,0001 mm. Die übrigen Werte sind für Platte 71, Nr. 4: Wellenlänge 5890,2 Å.-E., $p = 1733$ mm, $t = 174,3^\circ$.

$$(n\alpha)_m = 4,24 \cdot 10^{-7}; \nu' = 3,46 \cdot 10^{11};$$

daher

$$\rho = 9,41 \cdot 10^{20}.$$

Daraus

$$\mathfrak{N} = 3,04 \cdot 10^{11},$$

$$n = 2,22 \cdot 10^{12},$$

$$\frac{n}{\mathfrak{N}} = 7,3;$$

dabei sei nochmals auf die geringere Genauigkeit, besonders des Dampfdrucks, hingewiesen.

Die Elektronenzahl ergibt sich also hier, wie wir nach den Ergebnissen bei höheren Gliedern der Cäsiumserie schon vermuten müssen, bei dem ersten Glied der Serie von derselben Größenordnung wie die Zahl der Natriumatome. Wir beabsichtigen auch hier, durch Druckerhöhung in das Gebiet der von Gebhardt gemessenen Dampfdrucke vorzudringen, was in

1) A. Gebhardt, Dissert. Erlangen 1903.

2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 29. p. 179. 1909.

diesem Fall, bei dem ersten Glied der Serie, die einfachste Beziehung zum Dampfdruck liefern muß.

Angenäherte Berechnung der Elektronenzahl
für die Bandenlinien des Jods.

Für diese Überschlagsrechnung benutzen wir wieder die Tatsache, daß nach den Beobachtungen von Füchtbauer gut beobachtbare Absorption in den Jodlinien bei Gegenwart von Stickstoff von Atmosphärendruck ungefähr bei Drucken des Jodes um 1 mm stattfindet. Aus dem früher geschätzten Wert von ν' und einem mittleren Wert von $(n\alpha)_m$, der etwa der guten Beobachtbarkeit breiter Absorptionslinien entspricht, würde $n/\mathcal{N} = 10^6$ folgen. Wenn auch diese Schätzung höchstens bis auf einen Faktor 10 zuverlässig sein dürfte, so erkennt man doch, daß sich unter den bisher beobachteten Jodbandenlinien keine befindet, für welche die Teilchenzahl (die Teilchen als Elektronen angenommen) auch nur annähernd an die Molekülzahl herankommt. Ob es sich um eine prinzipielle Eigenschaft der Banden handelt, die ja mit der Valenz, mit chemischer Verbindung, irgendwie zusammenhängen, kann man aus dem Beispiel der wenigen beobachteten Jod- und Bromlinien noch nicht sicher entscheiden.

6. Intensitätsverteilung in den Cäsiumlinien.

Wir beobachteten in allen Fällen eine Unsymmetrie der Absorptionslinien zu der Stelle größter Absorption, und zwar war dieselbe stets von der Art, daß die Linie sich auf ihrer langwelligen Seite der aus der Drudeschen Theorie berechneten Kurve anschloß, während nach der kurzwelligen Seite zu der Abfall des Absorptionsindex erheblich steiler war als bei der theoretischen Kurve. Wir reproduzieren für die Linien $\lambda = 4555 \text{ Å.-E.}$ und $\lambda = 4593 \text{ Å.-E.}$ je eine Registrierkurve für den Druck 1600 mm und 2360 mm (Fig. 5—8).

Platte 46, Aufnahme 11 ist auch mit dem Hartmannschen Photometer photometriert worden (Fig. 9), die Abszissen sind Plattenlängen, die Ordinaten relative Intensitäten. Dieses eine Beispiel haben wir noch näher behandelt und die Ordinaten auf konstant einfallende Intensität umgerechnet, um

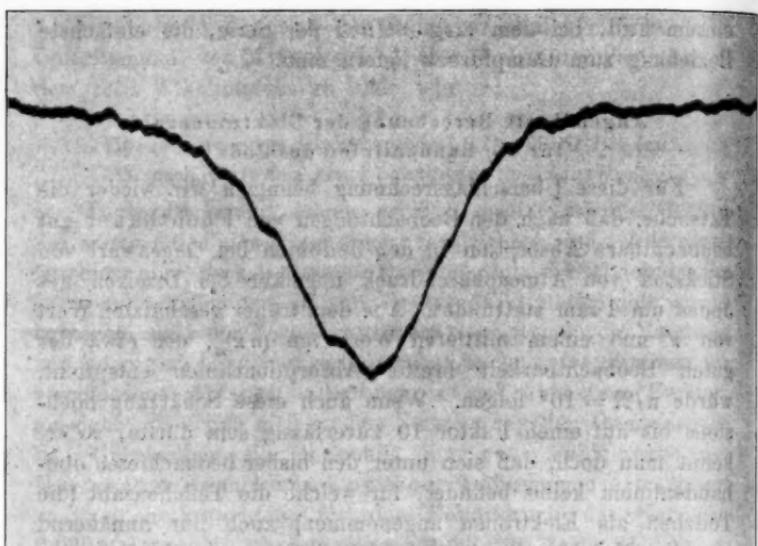


Fig. 5. Platte 46, Aufnahme 11. Cs 4555 Å.-E. $t = 129,8^\circ$. $p = 2360$ mm.
Abszissen: 55,6 fach vergr. Plattenlängen. Ordinaten: Intensität in relat. Maß.

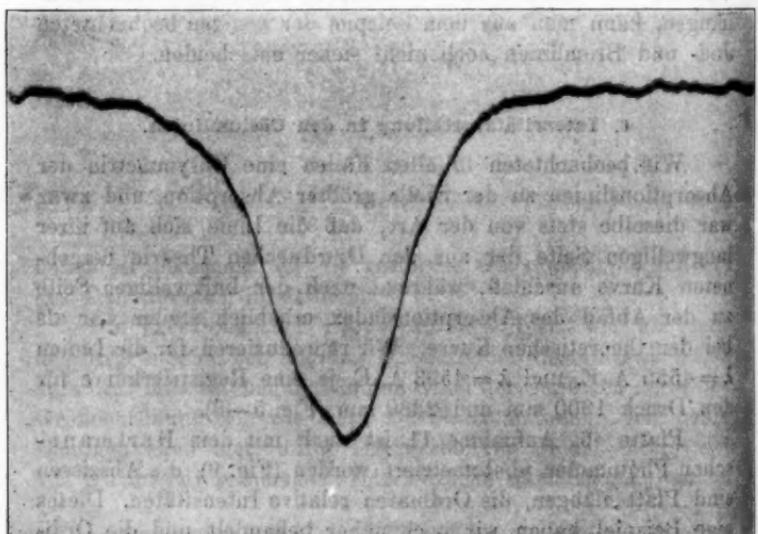


Fig. 6. Platte 46, Aufnahme 13. Cs 4555 Å.-E. $t = 129,8^\circ$. $p = 1600$ mm.
Abszissen und Ordinaten vgl. Fig. 5.

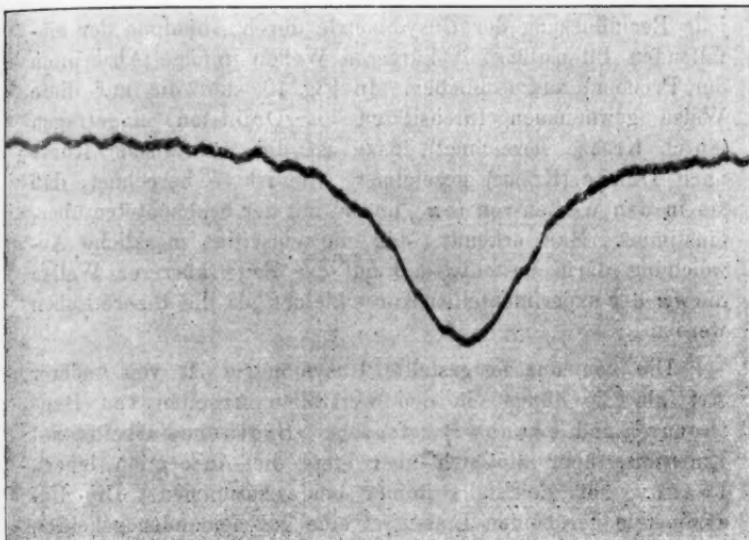


Fig. 7. Platte 47, Aufnahme 12. Cs 4593 Å.-E. $t = 148,9^\circ$. $p = 2360$ mm.
Abszissen und Ordinaten vgl. Fig. 5.

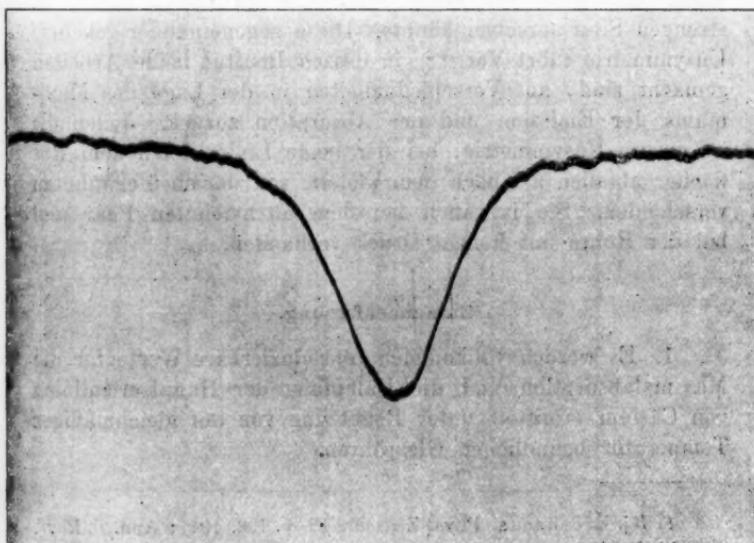


Fig. 8. Platte 47, Aufnahme 14. Cs 4593 Å.-E. $t = 148,9^\circ$. $p = 1600$ mm.
Abszissen und Ordinaten vgl. Fig. 5.

jede Beeinflussung der Unsymmetrie durch Abnahme der einfallenden Intensität mit kürzeren Wellen (infolge Absorption der Prismen) auszuschließen. In Fig. 10 sind die auf diese Weise gewonnenen Intensitäten als Ordinaten eingetragen (durch Kreuze bezeichnet), dazu ist die theoretische Kurve nach Drude (Kreise) gezeichnet. Sie ist so berechnet, daß sie in den Werten von $(n\chi)_m$ und ν' mit der beobachteten übereinstimmt. Man erkennt, daß die einseitige merkliche Abweichung darin besteht, daß auf der Seite kürzerer Wellen die $n\chi$ der experimentellen Kurve kleiner als die theoretischen werden.

Die von uns festgestellte Unsymmetrie ist von anderer Art als die jüngst in den wertvollen Arbeiten von Brotherus¹⁾ und Iwanow²⁾ gefundene. Brotherus arbeitet mit Emission, über die sich aber stets die Absorption lagert, Iwanow hat gleichfalls immer beide zusammen. Die Unsymmetrie der beiden Linien ist eine gegeneinander gekehrte, d. h. also sie würden symmetrisch liegen zu einer Stelle zwischen beiden Linien, wenn ihre Gestalt so genau gleich wäre, daß man von einer Symmetrie zu dieser Stelle im strengen Sinn sprechen könnte. Diese gegeneinander gekehrte Unsymmetrie führt Voigt³⁾, in dessen Institut beide Arbeiten gemacht sind, auf Verschiedenheiten in der Lage des Maximums der Emission und der Absorption zurück. Jedenfalls ist unsere Unsymmetrie, bei der beide Linien nach dem Rot flacher abfallen als nach dem Violett, von der eben erwähnten verschieden. Sie ist auch bei dem ultravioletten Paar und bei der Röhre mit hohem Druck vorhanden.

Zusammenfassung.

1. Es werden vollkommen reproduzierbare Werte für die Maximalabsorption und die Dämpfung der Hauptserienlinien von Cäsium ermittelt unter Benutzung von auf gleichmäßiger Temperatur befindlichen Glaskröpfchen.

1) Hj. Brotherus, Phys. Zeitschr. 12. p. 193. 1911; Ann. d. Phys. 38. p. 397. 1912.

2) K. Iwanow, Phys. Zeitschr. 13. p. 1112. 1912.

3) W. Voigt, Ann. d. Phys. 42. p. 211. 1913.

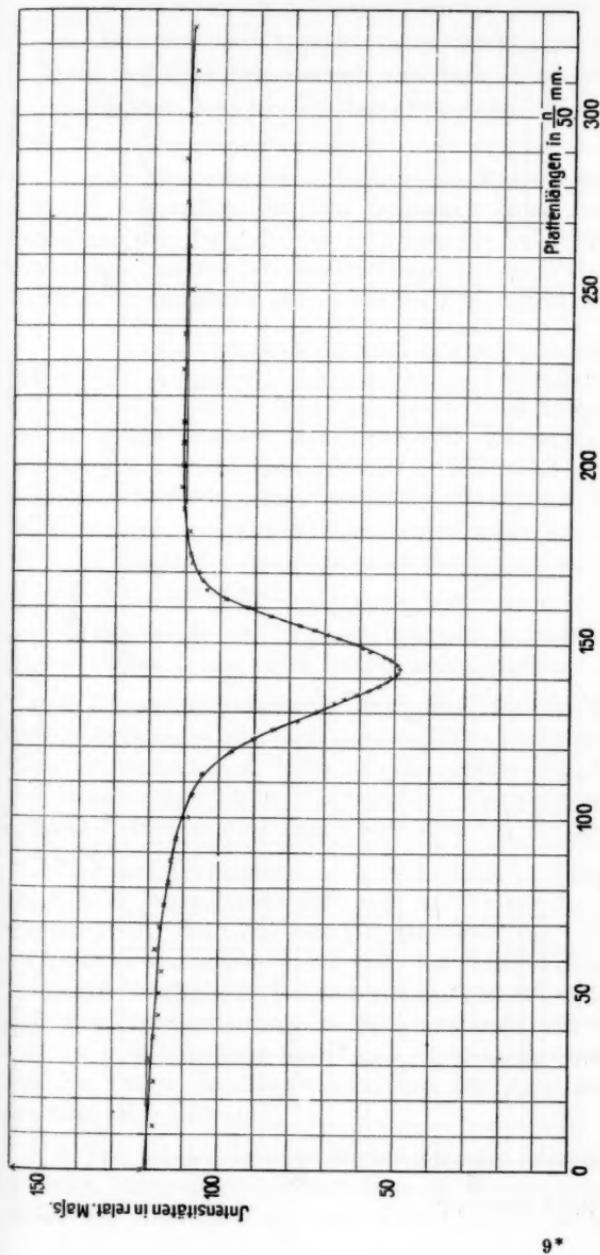


Fig. 9.

Platte 46, Aufnahme 11. $Cs 4555,44 \text{ \AA} \cdot E.$ $t = 129,8^{\circ}$. $p = 2360 \text{ mm}$, mit dem Hartmannschen Photometer photometriert, Abszissen in der Originalzeichnung gegenüber der Platte 50 fach vergrößert.

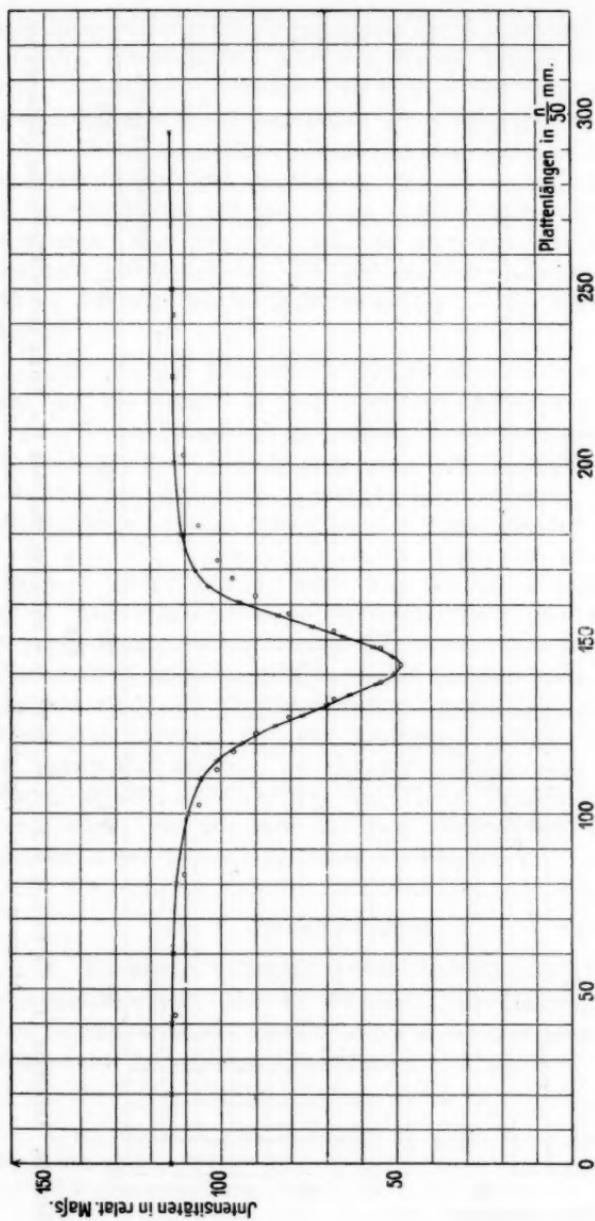


Fig. 10.

Die gleiche Aufnahme wie Fig. 9. Die Ordinaten sind auf konstant einfallende Intensität reduziert; für die Reduktion ist die Kurve verwendet, nicht die experimentell gefundenen Punkte. Die symmetrische theoretische Kurve ist durch Kreise markiert.

2. Das von der Lorentzschen Stoßtheorie geforderte Wachsen des Halbwertsintervalls mit dem Druck wird durch die Messungen bis zu Drucken von etwa 30 Atm. festgestellt.

3. Die ziemlich genau vorhandene Proportionalität der stärksten Absorption mit dem reziproken Druck beweist die Unabhängigkeit der Zahl der schwingenden Teilchen von dem Gasdruck. Dadurch ist die Grundlage für den Vergleich verschiedener Serienlinien der nämlichen Serie gegeben.

4. Für das Verhältnis der zwei Linien des blauen Cäsiumpaars wird angenähert das ganzzahlige Verhältnis 3:1 gefunden, welches dem von Gouy und Bevan beim entsprechenden Rb-Paar in Emission gefundenen gleich ist. Zusammen mit dem von Gouy u. a. gefundenen und von Füchtbauer und Schell bei Absorptionslinien genau gemessenen Verhältnis des ersten Natriumpaars 2:1 und mit dem sicher unter 4:1 liegenden Wert der ultravioletten Cäsiumlinien scheint das auf ein neues Seriengesetz hinzuweisen.

5. Die Werte des Halbwertsintervalls unterscheiden sich für die beiden Linien eines Paares nicht merklich.

6. Die aus der Gastheorie berechnete Zahl der Zusammenstöße unterscheidet sich in den untersuchten Fällen von Serienlinien nur durch einen Divisor 20—32 von der aus dem Halbwertsintervall berechneten Störungszahl. Unterschiede von der gleichen Größenordnung zeigen sich auch bei Bandenlinien.

7. Durch Verwendung der von Kröner zu diesem Zweck gemessenen Dampfdrucke läßt sich das Verhältnis der Elektronenzahl zur Zahl der Dampfatome berechnen. Es war in allen Fällen ein solches, daß sich, bei Berücksichtigung des Intensitätsverhältnisses der Serienlinien, für das erste Linienpaar eine Übereinstimmung der Elektronenzahl und der Atomzahl der Größenordnung nach ergab. Daraus wird geschlossen, daß die Träger der Hauptserienlinien der Alkalimetalle die neutralen Moleküle sind.

8. Die bei den höheren Stickstoffdrucken sehr angenähert erreichte wahre Intensitätsverteilung ist unsymmetrisch. Der Abfall der Absorption ist nach Violett steiler als nach Rot.

Die Arbeit wurde von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte sowie von der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften durch reiche Spenden gefördert. Insbesondere sind wir Hrn. Geheimrat Wiener für sein großes Interesse, das er durch reichlichste Gewährung aller irgendwie notwendigen Mittel gezeigt hat, zum größten Dank verpflichtet.

Leipzig, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 29. September 1913.)

6. *Über die Abhängigkeit der Lichtelektrizität
der Metalle vom Gas;
von Georg Paech.*

(Gekürzte Dresdener Dissertation.)

Einleitung.

Einige frühere Arbeiten¹⁾ über den eventuellen Einfluß des umgebenden Gases auf die Lichtelektrizität waren zu wenig übereinstimmenden Ergebnissen gekommen²⁾, so daß man den Einfluß des Gases nicht für wesentlich hielt. Später stellte sich dann heraus³⁾, daß die Lichtelektrizität wesentlich von dem in die Platte aufgenommenen Gas abhängt, daß daher die früheren Versuche, welche nicht darauf geachtet hatten, das Gas wirklich aus den Plattenoberflächen zu entfernen und welche überdies die Ermüdungserscheinungen nicht beherrschten, und den anfänglichen Anstieg beim Einbringen in ein Gefäß noch nicht kannten, erklärlicherweise keine eindeutigen Ergebnisse hatten liefern können. Die beiden einzigen Resultate, welche ziemlich sicher standen, waren, daß in CO_2 die Lichtelektrizität größer⁴⁾ sei, wie in Luft und in *reinem Wasserstoff* geringer.⁵⁾ In letzterem Falle ist größte Sorgfalt auf die Reinheit zu verwenden, da kleine Verunreinigungen, insbesondere die leicht eintretende mit H_2S , die Lichtelektrizität sehr in

1) Th. Wulf, Ann. d. Phys. 9. p. 950—962. 1902; F. Breisig, Diss. Bonn 1891, Beibl. 17. p. 60. 1893; W. M. Varley, Phil. Trans. 202. A. p. 439. 1904.

2) Vgl. v. Schweidler, Wien. Akad. Ber. 107. IIa. p. 886. 1898, sowie ferner den Sammelbericht desselben im Jahrb. d. Radioaktivität 1. p. 358—400. 1904.

3) W. Hallwachs, Leipz. Ber. 58. p. 390. 1906; Ann. d. Phys. 23. p. 513. 1907.

4) A. Stoletow, Compt. rend. 107. p. 91. 1888; Elster u. Geitel, Wied. Ann. 41. p. 171. 1890; W. M. Varley, l. c. p. 448. Dagegen fand F. Breisig, l. c. in CO_2 geringere Empfindlichkeit als in Luft.

5) F. Breisig, Th. Wulf, W. M. Varley, W. Hallwachs, l. c.

die Höhe treiben können.¹⁾ Ein Einfluß des Wasserdampfes auf die Lichtelektrizität konnte von früheren Beobachtern nicht erhalten werden.²⁾

In diese Verhältnisse hatten dann im hiesigen (Dresdner) Institut ausgeführte Versuche von Hrn. Ullmann gelegentlich einer Arbeit über die lichtelektrische Ermüdung des Zinks³⁾ größere Klarheit gebracht. Bei diesen war, um den Einfluß der Ermüdung zu vermeiden, möglichste Schnelligkeit des Gaswechsels durch Benutzung von Reservoiren bewirkt worden, und der Ersatz der Gase, um auch möglichst viel von dem in der Platte enthaltenen Gas zu entfernen, unter Evakuierung erfolgt. Das Ergebnis war, daß sehr große Verschiedenheiten der Lichtelektrizität in die Erscheinung traten. Zunächst erwies sich Wasserdampf stark fördernd auf dieselbe: in Luft von 70—80 Proz. relativer Feuchtigkeit (bei Zimmertemperatur) war die Lichtelektrizität fast 3 mal so groß wie in getrockneter Luft⁴⁾; letztere übertraf wieder reinen, trockenen Wasserstoff um nahezu das dreifache, während feuchter Wasserstoff 2,5 mal so stark wirkte wie trockener. Trockne CO_2 ergab 2,5 mal, Ozon den sechsten Teil so große Werte wie trockene Luft. Es zeigte sich weiter, daß in feuchter Luft bez. feuchtem Wasserstoff starke Ermüdung stattfindet, und daß das im feuchten Gas gebildete Ermüdungsgens im nachfolgenden trockenen wieder verschwindet. Letzteres folgt daraus, daß die schließlich erhaltene Empfindlichkeit gleich hoch oder eher etwas höher war, wie wenn von vornherein trockene Luft eingeführt und in dieser die Lichtelektrizität untersucht wurde. Aus dem Vorigen ergab sich, daß der Wasserdampf zwei Vorgänge bewirkt, einmal ist bei seiner Anwesenheit die Lichtelektrizität gesteigert, so dann gibt er zu weiter folgender sehr starker Ermüdung Anlaß.

Die Versuche von Hrn. Ullmann hatten an Zn stattgefunden. Es blieb zunächst zu untersuchen, ob bei den gefundenen Wirkungen in erster Linie das Gas entscheidend ist, oder ob der Einfluß des Metalles vorwiegt. Zu diesem

1) Vgl. z. B. O. Nothdurft, Diss. Freiburg 1904.

2) A. Stoletoff, l. c.; A. Naccari, Beibl. 14. p. 666. 1890.

3) E. Ullmann, Diss. Rostock 1909; Auszug Ann. d. Phys. 32. p. 1—48. 1910.

4) Vgl. auch W. Hallwachs, Abh. d. Isis. 1909. Dresden. p. 67—70.

Zweck habe ich eine der Ullmannschen Untersuchung parallele mit Pt durchgeführt. Nachdem dieselbe in qualitativer Richtung wesentlich das nämliche ergeben hatte wie jene Versuche mit Zn, wurde die Frage in Angriff genommen, ob sich die Einwirkung der Gase auf die Lichtelektrizität nicht in direkterer Weise feststellen ließe. Hierfür hat Hr. Hallwachs Gesichtspunkte entwickelt¹⁾, deren Verfolgung zu positiven Ergebnissen führte.

Erstens ergab sich, daß beim Zumischen von Dämpfen die Stärke der Lichtelektrizität sich im allgemeinen dem Verlauf der Dielektrizitätskonstante der betreffenden Substanzen anschloß, — zweitens, daß in reinen Gasen von hoher Dielektrizitätskonstante die Lichtelektrizität beträchtlich höhere Werte wie in Luft annimmt, in NH_3 z. B. etwa 5 mal so große, während eine direkte Volumenwirkung auf das NH_3 wie durch besondere Versuche festgestellt wurde, nicht in Betracht kam.

Die Untersuchungen wurden im Phys. Institut der Techn. Hochschule Dresden auf Anregung von Hrn. Geheimrat Hallwachs ausgeführt.

A. Versuche mit Platin in Luft, Wasserstoff, Kohlensäure und Wasserdampf.

Bei diesen Versuchen handelte es sich darum, für Pt ein ähnliches Versuchsmaterial zu beschaffen, wie es Hr. Ullmann für Zn erhalten hatte, um durch einen Vergleich entscheiden zu können, ob der Einfluß des Gases maßgebend ist, oder ob die Reihenfolge der Wirkung verschiedener Gase bei den beiden Metallen verschieden ist.

a) Versuchsanordnung.

Die Versuchsanordnung ist im wesentlichen derjenigen von Herrn Ullmann nachgebildet. Die Hauptteile (Fig. 1) derselben sind die Untersuchungs- und die Maßzellen Z_1 und Z_2 mit den dazu gehörigen Elektrometern E_1 und E_2 und der Lichtquelle, ferner die Vorrichtungen zum Einfüllen und Entleeren des Gases.

Die Untersuchungszelle Z_1 bestand aus einem, zum Öffnen mit einem Schliff versehenen Glasrohr von 15 cm Länge und 5 cm Durchmesser, dessen vorderes Ende ein aufgekittetes

1) W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 634—638. 1912.

Quarzfenster von 26 mm lichter Öffnung trug. Geeignete Rohr-ansätze (vgl. Fig. 1) dienten dem Zu- und Abführen der Gase, sowie der Einführung der Verbindungsleitung zwischen dem Elektrometer und der Versuchsplatte — einem Pt-Blech von 18 mm Durchmesser — und der Leitung von der Batterie (120 Volt) zum Drahtnetz. Das Netz bildete den vorderen Abschluß eines in das Rohr eingeschobenen Messingzyinders von 35 mm Weite. Dieser Zylinder umhüllte die Pt-Platte, deren Abstand vom Drahtnetz 4 mm betrug. Der Plattenhalter saß in einem Ansatz am hinteren Rohrende. Die Durchführung der Leitungen und des Halters wurde mit Bernstein unter Kitten mit Siegellack ausgeführt.

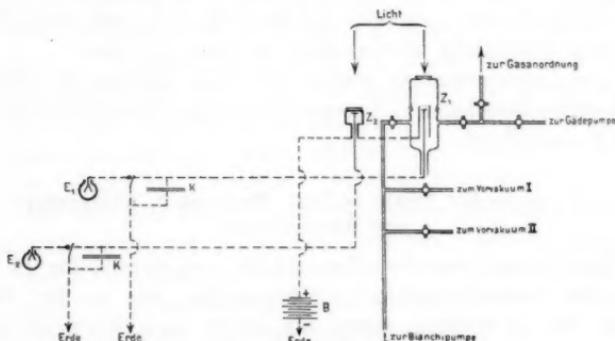


Fig. 1. Versuchsanordnung.

B Batterie (120 Volt).

K Kondensator.

*E*₁ Haupteletrometer.

*Z*₁ Untersuchungszelle.

*E*₂ Elektrometer der Lichtkontrolle.

*Z*₂ Maßzelle der Lichtkontrolle.

Die Maßzelle bestand aus einer alten Pt-Platte in einem Messinggefäß (vgl. die Figur in W. Hallwachs, Leipz. Ber. 58. p. 353. 1906 oder Ann. d. Phys. 23. p. 472. 1907). Sie wurde vor Beginn jeder Versuchsreihe zunächst 15 Minuten bestrahlt, was nach früheren Ergebnissen des Hrn. Hallwachs konstante Angaben sicherte.

Als Elektrometer für die Untersuchungszelle diente ein Aluminiumblattelektroskop mit mikroskopischer, für die Maßzelle ein solches mit Fernrohrablesung, wie sie von Hrn. Hallwachs I. c. p. 354 bzw. 473 beschrieben sind. Die Empfindlichkeit betrug 5 Skalenteile pro Volt. Die Verbindungs-

leitungen, welche von den Zellen zu den Elektrometern führten, liefen durch geerdete Schutzhüllen, ließen sich durch geeignete Schlüssel erden und an eine Reihe von Hilfskondensatoren anschließen, um die Empfindlichkeit der Meßanordnung geeigneten, und für Untersuchungs- und Maßzelle gleichen Beobachtungsfristen anzupassen.

Als Lichtquelle diente zu Anfang der Versuche eine Hefner-Altenecksche Gleichstrombogenlampe, die in einem Gefäß mit Vaselinöl stand und mit 55 Volt und 12,5 Amp. brannte, später eine Quarz-Hg-Lampe, welche bei 90 Volt 2 Amp. aufnahm. Der Abstand zwischen Lampe und Zelle betrug 53 cm, so daß Störungen durch Ozonbildung nicht zu befürchten waren.

Während man sich bei den Versuchen des Hrn. Ullmann mit der Wasserluftpumpe begnügt hatte, diente für die vorliegenden eine Gäddepumpe. Um das Leeren der Gefäße zu beschleunigen, kam ein großes Vorvakuum zur Anwendung, welches aus zwei großen Glasballons von je 120 Liter Inhalt bestand. Sie waren durch Vermittlung verschmolzener Glasrohre direkt an die Zuleitung zur Zelle angeschmolzen und mit Hilfe einer Bianchipumpe auf 10 bis 15 mm Hg gehalten. Ebenfalls an die Zuleitung zur Zelle angeschmolzen war das nur 40 cm lange Verbindungsrohr mit der Gäddepumpe. Hähne gestatteten, die Zelle entweder mit den Reservoiren in Verbindung zu setzen, was bei einer Leerung zunächst geschah, oder mit der Gäddepumpe, was dann folgte. Auf diese Weise ließ sich in sehr kurzer Zeit die Zelle bis zu hellgrüner Fluoreszens, in einem angeschmolzenen Entladungsrohr beobachtet, entleeren. Die Zeit konnte so herabgesetzt werden, daß sich die Zelle im Durchschnitt in 3 Minuten dreimal leeren und füllen ließ.

Von den Versuchsgasen stellte man zunächst 20 Liter her und sammelte sie in einem Glasballon auf. Um die Trocknung möglichst weit zu treiben, wurde außer den Trockenmitteln bei Herstellung der Gase noch eine Beschickung des Vorratsballons mit Phosphorsäureanhydrid zugefügt, wobei die Gase mehrere Tage in dem Ballon stehen blieben; auch war in einer Reihe von Fällen noch durch Anbringung einer kleinen Glühlampe auf der Außenseite des Ballons am unteren Teile dafür gesorgt, daß die Gase in Strömung kamen und so mit

dem Trockenmittel in allen Teilen zu genügender Berührung gelangten.

Der Gang der Messungen gestaltete sich wie folgt: Nachdem die erforderlichen Gase bereit waren, glühte man das Pt-Blech im Bunsenbrenner aus und ließ es darauf in einem geschlossenen Gefäß möglichst rasch abkühlen. Nach der Einführung in die Zelle und dem Schließen der letzteren trat dann sofort das Vorvakuum in Tätigkeit und im unmittelbaren Anschluß die Gädelpumpe. Nach erzielter Luftleere ließ man das zu untersuchende Gas eintreten und wiederholte im allgemeinen den Prozeß dreimal. Dann folgten die elektrischen Messungen. Nach Aufheben der bis dahin bestehenden Erdung der beiden Zellen beobachtete man die Zeiten, innerhalb deren das Blättchen des Elektrometers der Untersuchungszelle um 30, das der Kontrollzelle um 5 Skalenteile zurückging. Durch Variation der oben erwähnten Hilfskondensatoren waren die beiden Apparate so reguliert, daß die Ablesungen an den beiden Elektrometern unmittelbar aufeinander folgten und nur so viel Zeit blieb, als zum richtigen Erfassen der Beobachtungswerte gerade erforderlich war.

Im Laufe der Untersuchung hat sich später herausgestellt (vgl. weiter unten), daß das Ausglühen im Bunsenbrenner Fehlerquellen mit sich bringt, so daß bei einer Wiederaufnahme der Versuche stets im Vakuum elektrisch geglüht werden muß. Solches zu tun wurde einer späteren Arbeit überlassen, da die vorliegenden Versuche trotz der eben erwähnten Unvollkommenheit doch einen Weg wiesen, wie man der Frage nach der entscheidenden Mitwirkung des Gases bei der Lichtelektrizität auf direktere und beweiskräftigere Art beikommen konnte.

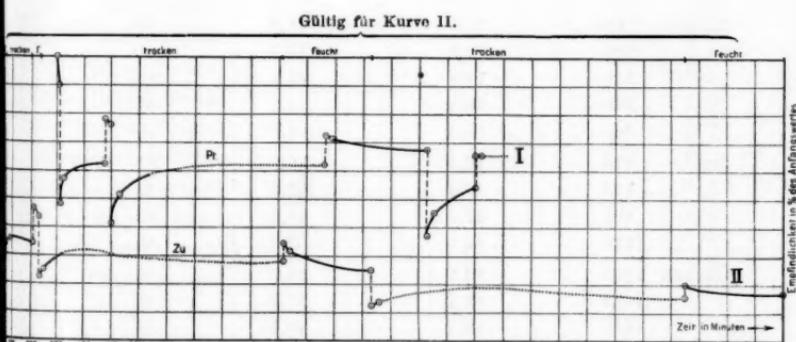
Die in diesem ersten Teile der Arbeit verwendeten Gase waren Luft, Kohlensäure und Wasserstoff, und zwar erstens in trockenem, zweitens in feuchtem Zustand. Das Anfeuchten der Gase geschah so, daß man sie durch eine 28 cm hohe Wassersäule von Zimmertemperatur durchperlen ließ. Die verwendete Luft war Zimmerluft, welche bei der Füllung der Gasometer zur Vermeidung von NH_3 durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure perlte. In den Gasometern wurde weiter getrocknet (vgl. weiter oben). Die Herstellung der CO_2 geschah aus Marmor und Salzsäure; zur Reinigung

von Spuren der letzteren führte man sie durch Na_2CO_3 . Den Wasserstoff gewann man aus Zn und H_2SO_4 ; als Reinigungsmittel dienten Natronlauge, Kaliumpermanganat und Pyrogallussäure.

b) Versuchsergebnisse.

1. Vergleich der Wirkung von trockener und feuchter Luft auf Pt mit der auf Zn.

Um den Einfluß von Wasserdampf bei Pt und Zn miteinander zu vergleichen, fanden parallele Versuche mit beiden Metallen statt. Zuerst wurde feuchte Luft eingelassen, der Verlauf der Lichtelektrizität etwa eine Viertelstunde lang verfolgt und dann trockene Luft in der oben angegebenen Weise unter dreimaligem Gaswechsel eingeführt. Nach etwa 3 Stunden (vgl. Fig. 2) ging man wieder auf feuchte, bald darauf auf trockene Luft zurück, wechselte nach weiteren 12—14 Stunden, dann nach 5—6 Stunden abermals und kehrte schließlich nach weiteren 3 Stunden beim Pt und 14 Stunden beim Zn zur feuchten Luft zurück.



I Luftwechsel feucht und trocken um Pt. (Abszisse — 300).

II Luftwechsel feucht und trocken um Zink.

Tabelle I gibt als Beispiel die mit Pt erhaltenen Versuchswerte im einzelnen wieder; in Fig. 2 sind dieselben zusammen mit den am Zn erhaltenen graphisch dargestellt.

Tabelle I. (Vgl. Fig. 2.)
Platin, feuchte und trockene Luft.

Zeit in Minuten		Beob. Zeit für 30 p Spannungs-abnahme in Sekunden	Empfindlichkeit (rezipr. Zeiten)	Maßzelle ¹⁾ Zeiten für 5 oder 10 p Spannungs-abnahme (Sekunden)
feucht	0	33,5	100,0	55 (5 p)
	2	34,5	97,1	55
	5	35,7	93,7	55
	7	36,5	91,8	55
	10	37,2	89,9	55
trocken	14	69,0	48,5	85 (10 p)
	19	62,5	53,6	85
	24	59,7	57,4	85
	50	58,0	57,8	85
	70	57,5	58,3	85
	175	54,0	62,0	85
feucht	180	43,0	77,9	55 (5 p)
	185	43,5	77,0	55
	190	44,0	76,1	55
	195	44,0	76,1	55
trocken	200	80,0	41,9	85 (10 p)
	205	76,5	43,8	85
	210	71,5	46,9	85
	230	68,5	51,2	85
	965	54,0	62,0	85
feucht	970	46,0	72,0	85 (5 p)
	975	46,0	72,0	85
	985	47,0	71,3	85
	1325	49,5	67,6	85
trocken	1330	90,5	37,0	85
	1335	85,5	39,2	85
	1340	82,5	40,6	85
	1350	74,0	45,3	85
	1500	51,5	54,6	85
feucht	1503	51,5	65,1	85
	1505	51,0	65,8	85
	1510	51,5	65,1	85
	1515	51,5	65,1	85

1) Einem Elektrometergang von 5 p in 55 Sek. ist ein solcher von 10 p in 85 Sek., wie durch besondere Versuche ermittelt, äquivalent.

Man sieht auf den ersten Blick, daß sich Pt und Zn vollkommen analog gegenüber der Einwirkung des Wasserdampfes verhalten. Quantitative Unterschiede bleiben bestehen, indem sich zunächst die Ermüdung in der feuchten Luft bei Zn, wie nach den Ergebnissen des Hrn. Ullmann zu erwarten war, als größer herausgestellt hat wie bei Pt. Auch ist das Verhältnis der

Empfindlichkeit in feuchter Luft zu der in trockener Luft bei Platin etwas kleiner als wie bei der am Zink (nicht ganz 2 gegenüber beinahe 3 im letzten Falle). Ferner zeigt sich Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Hrn. Ullmann, sowohl im ganzen Verlauf der Kurven als auch bezüglich des Verhältnisses der Empfindlichkeiten, für welches jener 2,75 fand.¹⁾

Fig. 3 gibt eine andere Kurve für Pt, aus der die Einzelheiten des Verlaufs besser zu ersehen sind. In der Figur

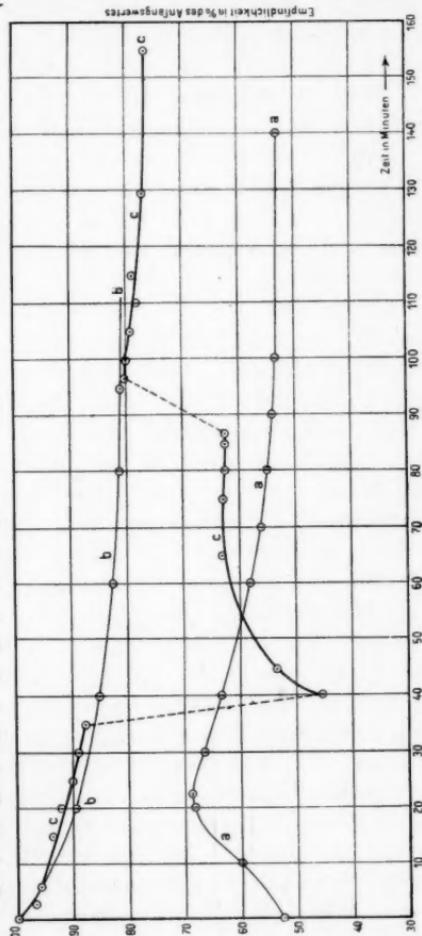


Fig. 3.
aa: Verlauf in trockener Luft.
bb: Verlauf in feuchter Luft.
cc: Wechsel zwischen trockener und feuchter Luft. Ordinale verkürzt.

1) E. Ullmann, l. c. p. 40.

finden sich auch in trockener und feuchter Luft je für sich aufgenommene Kurven. Es ist ersichtlich, daß diese ganz analog verlaufen wie für den Fall, daß Wechsel des Gases vorgenommen wurde. Ferner zeigt der Vergleich der Kurve für feuchtes Gas mit derjenigen mit Wechsel des Gases, daß die schließlichen Werte, wenn das feuchte Gas zum zweitenmal eingeführt wird, nahezu dieselben sind, ob nun vorher zeitweise trockene Luft die Platte umgibt oder nicht, und dieses Verhalten tritt auch ganz entsprechend aus Fig. 2 hervor, so daß man zu der Ansichtung kommt, der Ermüdungsprozeß spiele sich fortlaufend, sozusagen unter den durch den Gaswechsel veranlaßten Änderungen fort, es finde einfache Superposition beider Vorgänge statt.

Faßt man die Kurve für trockene Luft ins Auge, so zeigt sich der entsprechende Anstieg, wie er auch von Hrn. Ullmann (l. c. p. 32) und zuerst von Hrn. Hallwachs (l. c. p. 381 bzw. p. 502) beobachtet wurde. Es ist also zunächst festzustellen, daß in trockener Luft und ebenso, wie schon Hr. Ullmann fand, und wie es auch besondere Versuche weiter unten zeigen werden, in trockenem Wasserstoff und trockener Kohlensäure die Lichtelektrizität allmählich ansteigt. In der großen Anzahl von Versuchen ähnlicher Art, die im hiesigen Institut ausgeführt worden sind, trat dieser Anstieg immer mit aller Regelmäßigkeit auf. Hieraus folgt unter anderem, daß Austrocknen der Oberfläche die Lichtelektrizität nicht vermindert, daß also eine Erklärung der hier vorliegenden Ermüdungen nicht etwa durch Auflagerung einer im feuchten Zustand lichtelektrisch wirksamen, im trockenen Zustand unwirksamen Schicht erklärt werden kann, wie es Hr. Becker¹⁾ für einige spezielle Fälle angenommen hat.

Für die Deutung des Anstiegs hat Hr. Hallwachs Gesichtspunkte entwickelt²⁾. Die zunächst liegende Auffassung, daß er dem Weggehen von Ermüdungssagens verdankt wird, ist wegen der großen Regelmäßigkeit des Auftretens des Anstiegs, weil er in seiner vollen Stärke bestehen bleibt, wenn man die Zeit vom Auffrischen der Plattenoberfläche ab bis zum ersten lichtelektrischen Versuch noch so sehr abkürzt,

1) A. Becker, Ber. Heidelb. Akad. 1912. Abh. 4; Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 806. 1912.

2) W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 644. 1912.

wohl nicht als richtig zu betrachten. Die offenbar vorhandene primäre Wirkung des Gases bei der Lichtelektrizität, wie sie im Laufe dieser Arbeit noch schärfer hervortreten wird, läßt als Ursache des Anstiegs die fördernde Mitwirkung des an den Atomen unmittelbar anliegenden Gases vermuten.

Als Ursache dafür, daß in der angefeuchteten Luft kein Anstieg, sondern sofort Abnahme der Empfindlichkeit eintritt, kann angesehen werden, daß bei den vorhandenen Feuchtigkeitsgraden Wasserstoffsuperoxydbildung auch bei Pt sofort eintritt. Ferner läßt das oben erwähnte „Überlagertsein“ des Ermüdungsprozesses vermuten, daß nicht aller Wasserdampf aus der unmittelbaren Umgebung der Metallatome durch das Entfernungsverfahren des feuchten Gases beseitigt wird und in den hängenbleibenden Mengen die Bildung von H_2O_2 sich fortsetzt. Daß das einmal gebildete Ermüdungsagens, wenn es H_2O_2 ist, hängen bleibt, würde sich durch dessen ausnahmsweise geringe Dampfspannung erklären. Von der Deutung des Anstiegs, welcher nach dem Übergang aus feuchter Luft in trockene eintritt, möchte zurzeit noch abgesehen werden.

2. Versuche mit CO_2 .

a) Vergleich von CO_2 und Luft.

Hr. Ullmann hatte CO_2 und Luft in getrennten Versuchsreihen beobachtet, was sich daraus erklärt, daß die Vergleichung verschiedener Gase bei ihm nur als Nebenresultat einer Arbeit mit anderem Ziel erhalten wurde. Im vorliegenden Falle mußte die Weiterführung der Untersuchung durch Beobachtungen mit Platin einen direkten Vergleich unter unmittelbarem Vertauschen der beiden Gase hinzufügen. Auch war noch zu untersuchen, inwieweit etwa die Empfindlichkeit in verschiedenen Gasen von der Reihenfolge ihrer Einführung abhänge, ob Nachwirkungen auftreten, und von welcher Größe diese seien.

Es kamen daher Versuche mit mehrmaligem direkten Wechsel von Luft und CO_2 zur Ausführung. Die graphische Darstellung der Ergebnisse findet sich in Fig. 4.¹⁾

Aus der Figur ist zunächst als Bestätigung früherer Versuche zu entnehmen, daß die Lichtelektrizität bei Pt in

1) Die der Figur zugrunde liegenden Zahlen sind hier fortgelassen. Man vergleiche hierüber die Dissertation.

Kohlensäure rund $\frac{7}{4}$ mal so groß ist als in Luft, was mit dem Ergebnis des Hrn. Ullmann, welcher 2,1 bis 2,5 für jenes Verhältnis fand, genügend übereinstimmt. Etwas größer scheinen die Verhältniswerte bei Zink zu sein, wie sich das auch schon bei den Versuchen über den Einfluß des Wasserdampfs unter 1. ergab.

Ferner ist ersichtlich, daß beträchtliche Nachwirkungen stattfinden, indem, je nachdem das Gas empfindlicher oder

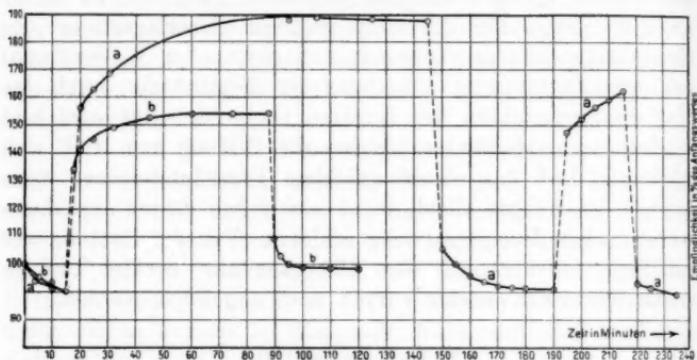


Fig. 4.

Vergleich von CO_2 und Luft (Platin).

aa: unter Zwischenevakuation. bb: unter Verdrängen.
Reihenfolge der Gase: Luft... CO_2 ... Luft...

unempfindlicher ist wie das vorhergehende, die Lichtelektrizität einen allmählichen Anstieg oder Abfall erfährt. Würde man die Werte, welche sich einstellen, nachdem die Nachwirkungen sich ausgeglichen haben, miteinander verglichen, so ergäbe sich für das Verhältnis CO_2 zu Luft etwa der Wert 2,1, welcher in besserer Übereinstimmung mit den von Hrn. Ullmann am Zn gefundenen Werten ist. Weiterhin ist ersichtlich, daß das Wirkungsverhältnis beider Gase eine den beiden Gasen zugehörige physikalische Konstante ist, deren Wert sich durch die Nachwirkungen zwar etwas beeinflußt zeigt, jedoch nicht sehr erheblich. So berechnet sich das Verhältnis für die beiden Gase aus den vier in der Figur vorhandenen Sprüngen zu 1,74; 1,77; 1,61; 1,76; es reicht also schon nahe an Konstanz heran, wenn man auch die Nachwirkungen ganz unberücksichtigt läßt.

Auch aus dem Vergleich von Zn und Pt bezüglich der Wirkung von CO_2 und Luft ergibt sich, daß das Gas einen entscheidenden, primären Einfluß bei der Lichtelektrizität besitzt, nicht bloß einen sekundären, da es nicht das spezielle Metall ist, welches bei verschiedenen Gasen verschiedene lichtelektrische Wirkung veranlaßt, sondern, daß der Einfluß des Gases eine weitgehende Unabhängigkeit vom Metall aufweist.

Um sicherzustellen, inwie weit der Gaswechsel unter Zwischenevakuation vollständiger wirke, als ein einfaches Verdrängungsverfahren, wurde CO_2 und Luft auch unter Benutzung eines solchen verglichen. Die Wahl einer kleinen Zelle von etwa nur 7 cm^3 Inhalt ließ die Verdrängung in kurzer Frist sehr vollständig besorgen. Die Zelle (vgl. Fig. 5) bestand aus einem seitlich an ein Glasrohr möglichst kurz angeschmolzenen Glasschliff, dessen Konus die Quarzplatte Q innen trug, so daß nur wenig Raum verbraucht wurde. Das Drahtnetz lag direkt der Quarzplatte auf. Die Führung der Zuleitungen, sowie der Abschluß des Gasinhaltes der Zelle mittels Hg ist aus der Figur ersichtlich. Diese zeigt auch das etwa 150 cbcm fassende Gasreservoir, dessen Inhalt durch Anheben eines unten mittels Schlauch angeschlossenen Quecksilbergefäßes, nachdem vorher die Gasanordnung durch einen Hahn gegen das Reservoir abgeschlossen war, in die lichtelektrische Zelle eingeführt wurde. Zweimaliges Nachfüllen des Reservoirs und Wiederentleeren in die Zelle gestattete die Gasverdrängung sehr vollständig zu bewerkstelligen.

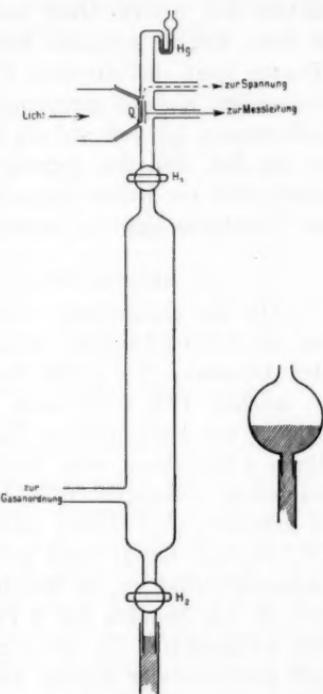


Fig. 5.

Verdrängungszelle mit Steigerrohr.
 Q Quarzplatte mit aufgekittetem
 Netz. $H_1 H_2$ Abschlußhähne.

Das Ergebnis einer Versuchsreihe mit dieser kleinen Zelle unter Verdrängen ohne Zwischenevakuierung wird durch die untere Kurve der Fig. 4 dargestellt. Sie ergibt, daß das Verhältnis der beiden Gase unter diesen Umständen um etwa 20 Proz. kleiner gefunden wird wie unter Zwischenevakuierung. Hieraus folgt, daß die beim Verdrängungsverfahren noch haften bleibenden, absolut genommenen geringen Mengen des Gases, bedeutenden Einfluß auf die Lichtelektrizität haben, und zwar in der Art, daß das voraufgehende Gas noch auf die Lichtelektrizität im später folgenden wirkt und so auf Ausgleich der Empfindlichkeit in verschiedenen Gasen hinarbeitet.

β) Nichteinfluß des H_2O -Dampfes bei CO_2 .

Ob die Zumischung von Wasserdampf zu CO_2 fördernd auf die Lichtelektrizität wirkt, konnte aus den Versuchen des Hrn. Ullmann (l. c. p. 38) nicht endgültig entschieden werden. In feuchter CO_2 bildet sich einmal auf dem Zn rasch eine Schicht von kohlensaurem Zink, was sich durch eine *dauernde*, durch Austrocknen oder Evakuieren *nicht mehr rückgängig* zu machende, außerordentliche Verringerung der Lichtelektrizität zu erkennen gibt. Führt man erst für eine kurze Zeit feuchte CO_2 ein und bringt dann trockene an ihre Stelle, so fällt die Lichtelektrizität in 10 Minuten bereits auf $\frac{1}{7}$ ihres Wertes und in 1,5 Stunden auf 6 Proz. Dies erklärte sich dadurch, daß kohlensaures Zn ein lichtelektrisch ganz unempfindlicher und nichtleitender Körper ist, wie durch besondere Versuche nachgewiesen wurde.

Beim Pt kann sich ein solcher unwirksamer Körper nicht bilden. Die Versuche ergaben nun, daß beim Ersetzen von feuchter Kohlensäure durch trockene bei Pt die Lichtelektrizität nicht nur nicht sinkt, sondern sogar, wenn auch nur sehr wenig, steigt, um dann später, wenn man wieder zu feuchter übergeht, um einen entsprechenden Betrag, etwa 10 Proz., zu fallen. Vermutlich wird dies so zu deuten sein, daß CO_2 und Wasserdampf, da sie beide große Werte der Lichtelektrizität liefern, sich in dieser Funktion gegenseitig ersetzen. Es muß noch erwähnt werden, daß die trockene Kohlensäure 8 Tage lang in einem Ballon über Phosphorsäure-anhydrid stehen blieb, so daß kein Zweifel darüber bestehen kann, daß sie bei den Versuchen genügend trocken war.

3. Versuche mit Wasserstoff.

a) Vergleich der Wirkung von trockenem und feuchtem H bei Pt.

Mit Wasserstoff wurden ganz entsprechende Versuche wie für Luft unter 1. angegeben ausgeführt. Dieselben sind in der folgenden Figur 6 dargestellt.

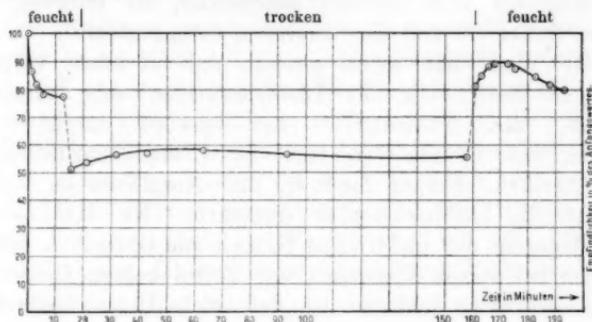


Fig. 6.

Vergleich von feuchtem und trockenem Wasserstoff. Platin.

Die Einführung des H_2O -Dampfes wirkt bei H, wie die Figur zeigt, ebenso wie bei Luft, fördernd auf die Lichtelektrizität. Ferner ist die Ermüdung in feuchtem Wasserstoff beträchtlich, ungefähr ebenso stark wie in Luft. Das entspricht ganz dem, was Hr. Ullmann (l. c. p. 34) am Zink fand. Also auch in diesem Falle ist der Einfluß des Gases entscheidend, der des Metalles tritt in zweiter Linie, ist aber vorhanden, da Hr. Ullmann das Verhältnis der Lichtelektrizität in trockenem und feuchtem Wasserstoff größer fand, als es sich hier für Platin ergibt. Einen schärferen Vergleich vorzunehmen ist deshalb nicht möglich, weil der Wasserdampfgehalt nicht gemessen wurde. Auf die Deutung weiterer Einzelheiten der Kurven kann zurzeit noch nicht eingegangen werden, so z. B. darauf, daß der allmähliche Anstieg, nachdem das trockene Gas eingeführt ist, hier sehr wenig ausgeprägt ist. Aus dem weiter unten Anzugebenden ist übrigens zu schließen, daß der Wasserstoff wohl nicht absolut rein gewesen ist und gerade bei Wasserstoff treten leicht Verunreinigungen ein, die auf die Lichtelektrizität sehr beträchtlich wirken, wie schon Wulf¹⁾ gezeigt hat.

1) Th. Wulf, Ann. d. Phys. 9. p. 950—962. 1902.

β) Vergleich von H und Luft.

Der Vergleich von H mit Luft oder auch CO_2 stieß auf Schwierigkeiten. Ersetzte man den Wasserstoff durch Luft, so ging die Lichtelektrizität nicht herauf, sondern etwas herunter, was dem gerade in diesem Punkte übereinstimmenden Ergebnis aller anderen Beobachter, die teilweise auch Platin, ferner Cu und Zn benutzten, entgegenlief*tu*.¹⁾

Hr. Wulf hat schon gezeigt, daß H leicht Verunreinigungen besitzt, die die Lichtelektrizität sehr verstärken können. Hr. Nothdurft²⁾ hat speziell darauf hingewiesen, daß Spuren von H_2S die Lichtelektrizität in die Höhe treiben. Ferner fand er, daß Ausglühen im Bunsenbrenner die Lichtelektrizität vermehrte. Hr. Hallwachs³⁾ fand dagegen, daß elektrisches Glühen und Glühen im Bunsenbrenner bei seinen Versuchen mit Platin keinen Unterschied ergab, woraus zu schließen ist, daß solche Unterschiede durch Unreinigkeiten des Leuchtgases im Bunsenbrenner und für gewisse Fälle der umgebenden Luft hervorgerufen werden.

Um nun zu sehen, welcher Umstand bei den Versuchen des Verfassers die Lichtelektrizität in H größer ergab als in Luft, wurde zunächst die Reinigung des H verbessert. Man ließ das Gas nach dem Durchperlen durch Pyrogallussäure und Kaliumpermanganat durch ein 8 m langes Rohr mit Phosphorsäureanhidrid und zuletzt durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure gehen. Dies änderte nichts. Ebensowenig brachte der Ersatz der Schwefelsäure durch Salzsäure im Kippschen Apparat eine Änderung, oder das Durchleiten des Gases durch ein Rohr, welches in feste Kohlensäure eingebettet war. Man hätte nun die Reinigung des H noch weiter treiben können, indem man ihn elektrolytisch erzeugte, und ferner ein Rohr mit reduziertem Cu einfügte; zunächst zeigte sich aber, daß eine andere Einwirkung bestand.

Die Platinplatten waren zu Versuchsbeginn immer durch

1) F. Breisig, Diss. Bonn 1891 (Beibl. 17. p. 60. 1893); F. Wulf, l. c.; W. M. Varley, Phil. Trans. 202. A. p. 439—458. 1904; W. Hallwachs, Leipz. Ber. 58. p. 371. 1906; Ann. d. Phys. 23. p. 491. 1907; E. Ullmann, l. c. p. 40.

2) O. Nothdurft, Diss. Freiburg 1904. (Beibl. 29. p. 526. 1905).

3) W. Hallwachs, l. c. p. 371 bzw. 492.

Ausglühen im Bunsenbrenner gereinigt worden, weil man vermutete, dabei unter ähnlichen Bedingungen zu arbeiten wie Hr. Hallwachs l. c., und so keinen Einfluß des Bunsenbrenners zu befürchten brauchte. Dies hat sich aber im vorliegenden Fall nicht als stichhaltig erwiesen, vielmehr ergab sich ein Einfluß des gewählten Glühverfahrens.

Zum Nachweis wurde zunächst ein neues Pt-Blech, *ohne* es vorher *auszuglühen* auf seine Lichtelektrizität in Luft und Wasserstoff untersucht mit dem Resultat, daß jetzt die Empfindlichkeit in Luft 1,5 mal so groß war wie in H. Es war also nunmehr Übereinstimmung mit den früheren Beobachtern erzielt. Dann kam wieder ein neues Pt-Blech zum Versuch, welches zuvor *elektrisch ausgeglüht* worden war. Dieses ergab für das Verhältnis Luft zu Wasserstoff 1,40, also ebenfalls Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Verhalten.

Glühte man jetzt aber in einem dritten Versuche wiederum ein neues Pt-Blech im Bunsenbrenner aus, so ergab sich das obige Verhältnis zu 0,67. Hiermit ist der störende Einfluß des Bunsenbrenners im vorliegenden Fall erwiesen. Dabei zeigte sich weiter, daß in Luft die elektrisch ausgeglühte Platte empfindlicher war als die im Bunsenbrenner geglühte.

Auf was nun diese Störung beruhte wurde aus dem Grund nicht untersucht, weil zunächst die Ausführung anderer Versuche (vgl. weiter unten) wesentlicher erschien. Jedenfalls ist aber im Auge zu behalten, daß für weitere Versuche auf diesem Gebiet die Reinigung durch elektrisches Glühen am sichersten besorgt wird. Dieses Glühen sollte außerdem im Vakuum vorgenommen werden, damit man von der Beladung mit Luft, in der das Ausglühen bei den vorliegenden Versuchen erfolgte und in welcher das Blech sich zunächst abkühlte, frei wird. Es ist zu vermuten, daß unter Anwendung des Ausglühens im Vakuum eine ausschließlichere Beladung der Platte mit dem zu untersuchenden Gas stattfindet und, wenn nicht dann, wie oft schon auf lichtelektrischem Gebiete in ähnlichen Fällen, neue Verwicklungen eintreten, die speziellere Wirkung der ersten Gasmengen aufgeklärt werden kann. Mit der Weiterführung der obigen Versuche in dieser Richtung ist Hr. Kober im hiesigen Institut beschäftigt.

B. Versuche über den Zusammenhang der Lichtelektrizität mit der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Gases.

a) Neue Fragestellung.

Das allgemeine Ergebnis des Abschnittes A, welcher über die Frage orientieren sollte, ob eine entscheidende Mitwirkung der Gase bei dem lichtelektrischen Prozeß besteht, ist, daß Zn und Pt sich den verschiedenen verwendeten Gasen gegenüber gleichartig verhielten, daß die Empfindlichkeit der Reihe Wasserstoff, Luft, Kohlensäure folgend ansteigt und daß Wasserdampf bereits in den kleinen Mengen, in welchen er bei den obigen Versuchen im Gase enthalten ist, große Lichtelektrizität hervorruft. Nachdem Hr. Hallwachs¹⁾ die Auffassung gewonnen hatte, daß zu vermuten sei, die Reihenfolge der Gase hänge mit ihrer dielektrischen Konstante zusammen, eine Vermutung, deren direkte experimentelle Prüfung die Frage nach der Mitwirkung der Gase bei der Lichtelektrizität wohl deutlicher zur Entscheidung bringen mußte, als die Fortsetzung der seitherigen Untersuchung — führte ich zunächst orientierende Versuche aus, welche über die Richtigkeit dieser Auffassung Anhaltspunkte liefern sollten. Sie bestanden darin, daß Dämpfe von Substanzen möglichst verschiedener dielektrischer Konstante der Luft beigemischt wurden. Nachdem dadurch jener Anschauung eine weitere Grundlage gegeben war, folgte, daß für einfache Körper von hoher dielektrischer Konstante in Gasform die Lichtelektrizität besonders groß sein mußte. Es wurde daher zu derartigen Untersuchungen übergegangen, welche dann ebenfalls Bestätigung brachten.

b) Einfluß zugemischter Dämpfe von Substanzen verschiedener Dielektrizitätskonstante.

Außer der Reihenfolge der drei Gase Wasserstoff, Luft, CO_2 bezüglich der Lichtelektrizität, wies vor allem der Einfluß des Wasserdampfes darauf hin, daß das Zumischen von Körpern hoher dielektrischer Konstante die Lichtelektrizität fördern möchte. Findet eine solche Wirkung statt, so wird sie natürlich außer von der dielektrischen Konstante noch abhängen von der Menge der Substanz und anderen Faktoren. In welcher Weise dies aber geschieht, ließ sich vorläufig noch nicht sagen.

1) W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 634—638. 1912.

Man wählte daher einfach einige Substanzen von sehr verschiedener dielektrischer Konstante und etwas großer Dampfspannung bei der Versuchstemperatur (Zimmertemperatur) aus, um eine Orientierung zu erhalten, und zwar Methylalkohol $D = 33$; Aceton $D = 25$; Chloroform $D = 4,9$; Benzol $D = 2,3$.

1. Versuchsanordnung.

Bei diesen Versuchen war vor allem darauf Rücksicht zu nehmen, daß das wirksame Licht in den betreffenden Substanzen zum Teil ziemlich stark absorbiert wird. Daß sich infolgedessen nicht etwa eine direkte lichtelektrische Volumenwirkung auf das Gas einmischt, ist weiter unten bei c) durch besondere Versuche nachgewiesen. Um nun die Lichtabsorption in den Gasen möglichst einzuschränken, wurde eine Zelle verwendet, bei welcher die Strecke vom Quarzfenster bis zur belichteten Platte nur 3 mm lang war, und überdies die Lichtabsorption auf einer solchen Strecke mit Hilfe eines besonderen ebenfalls 3 mm dicken Absorptionstroges bestimmt.

Die Zelle war im allgemeinen ähnlich geformt, wie die unter A. a) beschriebene, jedoch waren die erforderlichen Kittungen an den Bernsteinisolationen und an der Quarzplatte mit Paraffin ausgeführt oder durch Paraffin gedeckt, was sich als notwendig und ausreichend erwies, um den Einfluß der Dämpfe auf die Kittstellen zu beseitigen.

Der Absorptionstrog zur Messung der Lichtabsorption bestand aus einem Messingring von 3 mm Dicke, der hinten und vorn durch eine mit Paraffin angekittete und umgossene Quarzplatte geschlossen war. Die Dicke entsprach also der in der lichtelektrischen Zelle vom Licht durchlaufenen Strecke. Der Ring hatte für das Gas ein Zu- und ein Ableitungsrohr und konnte durch Vermittlung zweier Schlitte erstens in das Zuführungsrohr des Gases zur lichtelektrischen Untersuchungszelle eingefügt und zweitens durch Drehung um dieses Rohr als Achse in den Lichtweg zur Maßzelle ein- und ausgeschaltet werden. Letztere hatte ja auch eine Platinplatte als Empfänger, so daß sich die Lichtabsorption durch die Wirkung auf sie messen ließ. Diese Messung geschah in der Weise, daß gelegentlich der Hauptversuche mit der Untersuchungszelle das dort zu prüfende Gas auch den Absorptionstrog durchströmte, während dieser sich vor der Maßzelle befand. Nachdem mit

letzterer ein Versuch ausgeführt war, wurde der Trog, ohne seine Stellung zu ändern, mit Luft gefüllt, die auf der kurzen Trogstrecke nichts Beobachtbares absorbiert, und der Versuch mit der Maßzelle wiederholt. Der Vergleich der beiden an der Maßzelle beobachteten Zeiten lieferte direkt den Bruchteil des Lichtes, welcher die Gasstrecke zu durchdringen vermag, und dieser ist auch der Bruchteil, welcher beim Hauptversuch in der Untersuchungszelle an die dort befindliche Platte gelangt, da gemäß der Versuchsanordnung sowohl die durchlaufene Strecke als auch das Gas die gleichen sind.

Die übrige Versuchsanordnung war mit Ausnahme der hier besprochenen Teile die nämliche wie unter A. a) angegeben. Die Dampfzumischung erhielt die Luft (Zimmerluft) dadurch, daß sie durch die betreffende Flüssigkeit perlte, von der sich etwa 100 ccm in einer Vorlage befanden. Danach ging das Gas durch eine Waschflasche mit konzentrierter Schwefelsäure zur Trocknung und zur Beseitigung von etwa vorhandenen Ammoniakspuren, da solche, wie weiter unter gezeigt wird, die Lichtelektrizität außerordentlich heben.

2. Versuchsergebnisse.

In den folgenden Tabellen gibt die erste Spalte die Zeit, welche seit Versuchsbeginn verflossen war, d. h. seit der ersten nach dem Ausglühen und Abkühlen des Platinbleches ausgeführten lichtelektrischen Messung. Die in der zweiten Spalte enthaltene Entladungszeit ist die Zeit für 30 p Elektrometergang bei der mit dem betreffenden Gas gefüllten Untersuchungszelle; Spalte 3 gibt ihren reziproken Wert, die Empfindlichkeit, den Anfangswert = 100 gesetzt. Die in der vierten Spalte unter dem Titel Absorption eingetragenen Werte bedeuten die für die Maßzelle für 5 p Elektrometergang beobachteten Zeiten, wenn sich in dem vorgeschalteten Absorptionstrog einmal Luft, das andere Mal das Dampf-Luftgemisch befand. Diese Beobachtungen fanden gleichzeitig mit den Hauptmessungen statt und geben ein Maß für das auf die Platte gelangende Licht, wobei die Korrektion für etwa eintretende Lichtänderungen, die übrigens immer nur sehr gering waren, mit erhalten wurden.

a) Methylalkohol ($D = 0,83$).

Versuchszeit in Minuten	Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100,0
	5	47,5	103,2
Methylalkohol	8	25,0	196,0
	10	23,5	208,5
	17	26,0	188,5
	25	29,0	169,0
	30	30,5	160,5
Luft	33	46,0	106,5
			44,0

Die Empfindlichkeit ist bei der Zumischung von Methylalkoholdampf, nach dem ersten Aufsprung berechnet $(196 \times 56,0)/(103 \times 44) = 2,42$ mal so groß wie in Luft. Der anfängliche Anstieg im Methylalkohol ist wohl auf die Fortsetzung der Einlagerung der Dampfsubstanz in das Metall zu schieben. Weiterhin zeigt sich im Methylalkohol eine Ermüdung von der etwa auch in feuchter Luft vorhandenen Stärke, die der zunehmenden Absorption der Elektronen beder weiteren Gasanlagerung, analog wie bei den früheren Beobachtungen mit Luft und H entsprechen wird.

β) Aceton ($D = 0,75$).

Versuchszeit in Minuten	Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100,0
	5	47,5	103,2
Aceton	7	44,0	111,3
	9	69,0	70,8
	11	85,0	57,6
Luft	13	48,0	102,0
			45

Die Abnahme der Empfindlichkeit mit der Zeit ist, wie aus der Tabelle hervorgeht, außerordentlich stark. Schon bei anderen Versuchen im hiesigen Institut hatte das Aceton wegen

seiner Unbeständigkeit Schwierigkeiten bereitet.¹⁾ Es entstehen dabei Körper von sehr geringer Spannkraft, so daß sich auf der Platte Flüssigkeit oder feste Substanz im Lauf der Zeit bilden muß, ein Vorgang, der dann die Empfindlichkeit rasch herabdrückt. Bemäßt man das Empfindlichkeitsverhältnis der Luft-Acetonmischung zu Luft nach dem ersten Sprung, so ergibt sich dafür der Wert $(111 \times 54):(103 \times 45) = 1,29$. Dies ist aber nur eine untere Grenze, da der erste Versuch sich im Mittel auf eine Zeit bezieht, zu der schon etwa $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Minuten lang Aceton zugeführt worden ist. Der von dem Einfluß der Zersetzung des Acetons befreite Wert wird nach den Zahlen der Tabelle zu urteilen daher um 30—40 Proz. größer sein, also etwa einen Verhältniswert um 1,7—1,8 herum ergeben. Versuche mit nicht ganz reinem Aceton lieferten verminderte Empfindlichkeit, die vorstehenden sind mit einem von Kahlbaum in einer zugeschmolzenen Flasche bezogenen Präparat erhalten. Die Flasche wurde erst unmittelbar vor dem Versuch aufgeschnitten. Wiederholungen des Versuchs ergaben mit den in der Tabelle enthaltenen übereinstimmende Werte.

γ) Chlороform ($D = 4,9$).

Versuchszeit in Minuten	Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100,0
	5	47,5	103,2
Chloroform	8	93,0	52,5
	10	96,0	51,0
Luft	13	48,0	102,0

Die Empfindlichkeit der mit Chloroformdampf geschwängerten Luft verhält sich zu der Luft wie $(52,5 \times 54):(103,2 \times 45) = 0,61$.

Das Verhältnis der Empfindlichkeiten Luft-Benzoldampf zu Luft ist $(33,3 \times 104):(103,2 \times 44) = 0,75$. Der letzte Versuch, nach Wiedereinführen von Luft, ergibt eine sehr verminderte Empfindlichkeit, woraus hervorgeht, daß Benzol nicht

1) F. Röhrs, Ann. d. Phys. 37. p. 294—295. 1912.

so leicht wieder wegzubringen ist; der weitere Verlauf in Luft wurde irrtümlicherweise nicht verfolgt.

δ) Benzol (D = 2,3).

Versuchszeit in Minuten		Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100	44
	5	47,5	103,2	
Benzol	8	147,0	33,3	104
	10	163,0	30,5	
Luft	14	81,0	60,3	44

ε) Zusammenfassung.

Aus den vorstehenden Versuchen ergibt sich, daß die Empfindlichkeit durch die beiden Körper mit großer Dielektrizitätskonstante vermehrt, durch die beiden mit kleiner vermindert wird. Letzterer Umstand ist wohl so zu deuten, daß von den beiden Einflüssen der Gase, Steigerung der Lichtelektrizität und Absorption der Elektronen, letztere überwiegt, wenn die Dielektrizitätskonstante zu klein ist.

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes gelangt man zu dem Schluß, daß die Lichtelektrizität von der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Gases abhängig ist, und zwar so, daß sie mit deren Vergrößerung wächst. Vermutlich ist der Versuch von Hrn. Breisig (l. c.), der in mit Alkoholdampf halbgesättigter Luft die Lichtelektrizität 3—4 mal so groß fand wie in Luft, unter dem nämlichen Gesichtspunkt zu betrachten, wie die hier ausgeführten Beobachtungen. Bisher sind diese Versuche von Herrn Breisig nicht sehr beachtet worden, weil sich in ihnen Richtiges mit Unrichtigem vermengt. So hat namentlich sein Resultat, daß die Lichtelektrizität in CO_2 kleiner sei als in Luft, und zwar erheblich — nur 60 Proz. so groß, was mit den Resultaten aller andern Beobachter im schärfsten Widerspruch steht — bewirkt, daß man seine Bestimmungen nicht verwertete.

c) **Lichtelektrizität in einheitlichen Gasen von verhältnismäßig großer Dielektrizitätskonstante.**

1. Auswahl der Gase und Versuchsanordnung.

Nachdem die Versuche mit beigemischten Dämpfen die Vermutung des Hrn. Hallwachs, daß die Lichtelektrizität von der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Gases abhängig ist, bestätigt hatten, ging man nunmehr dazu über, Versuche mit einheitlichen Gasen anzustellen. Dafür waren solche auszuwählen, welche eine besonders hohe Dielektrizitätskonstante hatten; in diesen mußte, Richtigkeit der Arbeitshypothese vorausgesetzt, die Lichtelektrizität besonders hohe Werte annehmen. Die Dielektrizitätskonstanten der Gase sind alle nur sehr wenig von 1 verschieden; wenn eine Einwirkung von ihnen stattfand, so konnte dafür nur ihr Überschuß über die Eins in Betracht kommen. Es mußten also Gase ausgewählt werden, welche einen möglichst hohen Überschuß über die Eins besaßen. Als solche sind zu nennen: Cyanwasserstoff, Ammoniak, Methyläther, Schweflige Säure Anhydrid, Ätylen. Vom Cyanwasserstoff wurde zunächst einmal wegen der Schwierigkeiten in der Behandlung dieses Körpers abgesehen, schweflige Säure konnte nicht in Frage kommen, weil sich dieselbe unter dem Einfluß des Lichtes unter Schwefelabscheidung zersetzt. Dieses hat schon Morren¹⁾ festgestellt; ferner hat unter andern Coehn²⁾ gezeigt, daß bei Belichtung von SO_2 mit einer Hg-Lampe sich Schwefel an der der Lampe zugekehrten Gefäßseite in solchem Maße niederschlägt, daß die Strahlen vollständig absorbiert werden und der Fortgang der Reaktion aufhört. Man verwendete daher NH_3 , $(\text{C}_3\text{H}_2)_0$ und C_2H_4 , für welche $D-1$ die Werte $7,1 \times 10^{-3}$, $7,4 \times 10^{-3}$ und $1,4 \times 10^{-3}$ besitzt. Zum Vergleich möge angeführt werden, daß CO_2 , Luft und H die entsprechenden Werte $0,98 \times 10^{-3}$, $0,59 \times 10^{-3}$, $0,26 \times 10^{-3}$ haben. Der Wechsel der Gase geschah unter Zwischenevakuierung ganz so wie es unter A. a) beschrieben ist. Die Versuchsanordnung war die gleiche wie unter B. b) angegeben, die Platte wurde vor jeder Versuchsreihe geheizt, auch beziehentlich der Messung des absorbierten Lichtes wurde so wie dort verfahren.

1) Morren, Ann. chim. phys. 21. p. 323. 1870.

2) A. Coehn, Zeitschr. f. Elektrochem. 13. p. 545. 1907.

2. Versuchsergebnisse.

a) Ammoniak.

Das Ammoniak wurde aus seiner wässerigen Lösung durch Erwärmen gewonnen und über Natronkalk und gebranntem Kalk getrocknet; dann gelangte es in einen 5 Liter fassenden Rundkolben, der in einer Kältemischung stand. In dieser blieb es 6 bis 8 Stunden, ehe es in die Zelle zur Untersuchung kam. Der Rundkolben lag an der Wasserstrahlpumpe und wurde dreimal mit Ammoniak gefüllt und wieder evakuiert. Der Aufenthalt in der Kältemischung erwies sich als notwendig, da das Gas sonst infolge seiner Wärme so viel Wasser trotz der Trockenrohre mitführt, daß dadurch die Messung falsch und die Isolation unbrauchbar wurde. In der Gasanordnung befand sich auch ein offenes Manometer, um Unter- oder Überdruck in der Zelle zu vermeiden. In der folgenden Tabelle sind die Versuchsergebnisse mit Ammoniak zusammengestellt.

Ammoniak um Pt.

Versuchszeit in Minuten	Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	45
	5	47,5	103,2
Ammoniak	7	20,5	239,0
	9	23,5	208,5
	12	25,0	196,0
	15	27,0	181,5
Luft	17	46,0	106,5

Aus der Tabelle ergibt sich das Verhältnis der Lichtelektrizität in NH_3 zu der in Luft als $(239 \times 93):(103.2 \times 45) = 4.79$. Die Lichtelektrizität ist also im NH_3 fast fünfmal so groß wie in Luft, so daß an der Mitwirkung des Gases nicht mehr zu zweifeln ist.

Es könnten aber Bedenken in der Richtung bestehen, daß eine direkte Volumenwirkung auf das Gas bestünde. Dies mußte besonders untersucht werden; eine solche Wirkung zeigte sich aber als nicht vorhanden. Um dies nachzuweisen, beleuchtete man einmal normal, dann tangential. Die dazu ver-

wendete Zelle bestand aus einem Glaszyylinder, dessen Achse nicht horizontal, sondern vertikal stand. Er ließ sich durch einen Schliff in einen oberen und unteren Teil trennen. Der obere besaß drei kurze seitliche Ansatzrohre, welche aufgekittete Quarzplatten trugen. Zwei dieser Ansätze standen einander diametral gegenüber; der dritte rechtwinklig dazu, ihm gegenüber befanden sich Ansatzrohre für Spannungs- und Meßleitung. Letztere trug die Platte, die Spannungsleitung war zum Netzträger ausgebildet. Oben ging die Zelle in ein dünneres Glasrohr über, welches in einen an die Glasleitung anschließenden Schliff mündete. Mittels beider, in einer Achse liegender Schlitte ließ sich die Zelle drehen und so die Platte normal und tangential zum Licht stellen. Man hätte hierzu mit zwei Öffnungen auskommen können; die dritte Öffnung, welche derjenigen gegenüberlag, durch welche die Platte tangential belichtet wurde, war zur Vermeidung störender Reflexe hinzugenommen worden. Die Entfernung zwischen Quarz- und Platinplatte betrug 37 mm, der Abstand Netz — Platte 4 mm.

Das Ergebnis der Messungen mit dieser Zelle war, daß das Blättchen im Elektrometer noch nicht um 1 Skalenteil in 150 Sekunden zurückging, wenn die Platte tangential belichtet wurde. Lichtelektrische Volumenwirkung auf das Gas spielt also bei den vorliegenden Versuchen keine Rolle.

β) Methyläther.

Der Methyläther wurde von Kahlbaum in einer Bombe bezogen. Er passierte auf seinem Wege zur Zelle ein U-Röhrchen mit ein paar Wassertropfen, das als Gasuhr diente, dann ein Trockenrohr mit Natronkalk. Zur Sicherung, daß mit Atmosphärendruck gearbeitet wurde, diente wie bei den Versuchen mit NH_3 ein in der Gasleitung angeschlossenes offenes Manometer.

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der mit Methyläther ausgeführten Versuche.

Aus der Tabelle ergibt sich das Verhältnis der Lichtelektrizität in Methyläther zu der in Luft zu $(234 \times 49) : (103 \times 45) = 2,47$. Es ist also auch in Methyläther die Lichtelektrizität erheblich größer wie in Luft.

Methyläther um Pt.

Versuchszeit in Minuten	Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100,0
	5	47,5	103,2
Methyläther	8	21,0	233,9
	10	23,5	208,5
	12	25,0	196,5
Luft	15	51,0	96,0

γ) Äthylen.

Äthylen wurde erst durch Kochen eines Gemisches von Alkohol und konz. Schwefelsäure im Verhältnis 1:6 gewonnen. Es zeigte sich aber, daß die Kältereinigung mit CO_2 -Schnee den Äther, der gleichzeitig mit entsteht, nicht vollkommen zu beseitigen vermag. Deswegen wurde Äthylen dann aus Zinkstaub und Äthylenbromid mit Alkohol verdünnt hergestellt. Man erwärmt in einem Kolben von etwa $1\frac{1}{4}$ Liter Inhalt, der einen möglichst langen Hals hat, annähernd gleiche Mengen von Zinkstaub und Äthylenbromid und setzt ein paar Tropfen Alkohol zu. Der Kolben muß mit einem Tropftrichter versehen sein, der ein Nachfüllen der Substanzen ermöglicht. Diese Methode ist zwar quantitativ nicht so gut wie die erst angegebene, das gewonnene Äthylen aber reiner. Zur weiteren Reinigung ging das entwickelte Gas durch reines Paraffinöl, welches organische Nebenprodukte absorbiert, vor allem Ätherspuren und Äthylenbromiddampf, dann durch konzentrierte H_2SO_4 gegen Alkoholdämpfe und schließlich durch ein in CO_2 -Schnee liegendes Rohr, um auch sicher die letzten Spuren von Äther zu entfernen.

In einem großen, 20 Liter fassenden Ballon fing man das Gas auf, richtete diesen als Gasometer ein und leitete das Äthylen aus ihm in die Zelle, nachdem es nochmals kältegetrocknet war. Aus nachstehender Tabelle sind die Versuchsergebnisse zu entnehmen.

Aus den nachstehenden Werten erhält man für das Verhältnis der Lichtelektrizität in Äthylen zu der in Luft

$(144 \times 62):(103 \times 48) = 1,80$. Es bestätigt sich also auch für das Äthylen, daß die Lichtelektrizität in ihm größer ist als in Luft.

Äthylen.

Versuchszeit in Minuten		Entladungszeit in Sekunden	Empfindlichkeit	Absorption Maßzelle (Sekunden)
Luft	0	49,0	100,0	48
	8	47,5	103,2	
Äthylen	10	34,0	144,2	62
	15	28,0	153,2	
	30	32,0	142,3	
Luft	35	45,0	108,9	48

3. Zusammenfassung.

Das Ergebnis der Versuche ist, daß die Lichtelektrizität in Äthylen fast einen ähnlichen Wert erreicht wie in feuchter Luft (70—80 Proz. relative Feuchtigkeit), daß sie in Methyläther auf das 2,5fache und in Ammoniak fast auf das 5fache des Wertes in trockener Luft ansteigt. Aus diesen Versuchen zusammen mit denjenigen mit den zugemischten Dämpfen, darunter auch dem Wasserdampf und auch denen mit CO_2 tritt der Einfluß der Dielektrizitätskonstante deutlich hervor, ausnahmslos ist mit hohen Werten derselben, genauer mit großen Werten von $D=1$, starke Lichtelektrizität verknüpft. Vermutlich tritt in den beschriebenen Versuchen der Einfluß der Dielektrizitätskonstante noch nicht voll hervor. Erstens bringt nämlich das Ausglühen die Gasbeladung nicht vollständig weg, wie sich unter anderem daraus ergab, daß Platten, welche zunächst lange in Wasserstoff gelagert hatten und dann erst ausgeglüht wurden, sich anders verhielten als Platten die vorher in Luft gelagert hatten. In den ersten zeigten nachfolgende verschiedene Gase geringere Unterschiede wie in den letzteren. Zweitens dürfte auch das einfache Evakuieren die Gasbeladung nicht vollständig wegbringen, wie sich aus verschiedenen Anzeichen ergibt. Es müssen daher, nachdem durch die vorliegenden Versuche die sichere Orientierung darüber gewonnen ist, daß die Dielektrizitätskonstante mitwirkt, neue

Versuche anschließen, bei welchen das Ausglühen und Evakuieren vereinigt und damit jedenfalls eine höhere Stufe der Gasfreiheit der Platte erzeugt wird. Solche Versuche sind inzwischen in Gang gesetzt worden.

Weiterhin ist zu fragen nach der Art der Wirkung der Dielektrizitätskonstante. Hr. Hallwachs kam¹⁾ in Anlehnung an eine früher gewonnene Anschauung dazu, diesen Einfluß in einer direkten Wirkung auf die Schwingungen der Elektronen im Metallatom zu vermuten. Man würde in Aussicht zu nehmen haben, daß die Schwingungen durch den Einfluß großer Dielektrizitätskonstante verlangsamt werden und infolgedessen die obere Grenze des wirksamen Lichtes zu kleineren Schwingungszahlen vorrückt. Einen diesbezüglichen Versuch habe ich auch ausgeführt. Dieser bestand darin, daß die Schwächung der Lichtelektrizität, wenn eine Anzahl Quarzplatten zum Zwecke der Lichtabsorption vorgeschaltet wurden, für den Fall der Luft und den des Ammoniaks bestimmt wurde. Die Schwächung in Luft betrug etwa 50 Proz., die in Ammoniak nur 25 Proz. Dieser Versuch würde im Sinne der erwähnten Anschauung sprechen. Leider aber hat sich nach Abbruch der erwähnten Versuchsanordnung herausgestellt, daß die Lichtabsorption im Ammoniak für das geschwächte Licht nicht besonders bestimmt worden war. Infolgedessen kann der Versuch nicht als entscheidend angesehen werden.

Indessen könnten, worauf Hr. Hallwachs²⁾ hingewiesen hat, Versuche von Pohl und Pringsheim,³⁾ bei denen sich die rote Grenze des wirksamen Lichtes nach dem Destillieren im Vakuum mit der Zeit nach Rot, und zwar sehr stark verschiebt, unter Umständen durch die angegebene Anschauung ihre Erklärung finden, indem das allmählich und langsam absorbierte Gas die Elektronenschwingungen verzögerte.

Die Art der Beziehung zur Dielektrizitätskonstante wird im allgemeinen keine einfache sein können, da die Gase ja außerdem noch durch Elektronenabsorption und eventuell noch

1) W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 8. p. 456/457. 1906; Phys. Zeitschr. 7. p. 770 links. 1906; Leipz. Ber. 58. p. 389. 1906; Ann. d. Phys. 23. p. 512. 1907.

2) W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 646. 1912.

3) R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. p. 546 bis 554. 1912.

auf anderem Wege Einwirkung auf die Lichtelektrizität ausüben möchten.

C. Zusammenstellung der Ergebnisse.

1. Der Einfluß des Gases auf die Lichtelektrizität entspricht beim Pt dem am Zn gefundenen, woraus folgt, daß ein entscheidender Einfluß des Gases auf die Lichtelektrizität besteht. Untersucht wurde dies an H, Luft, CO_2 und H_2O -Dampf.

2. Bei der Zumischung von Dämpfen von verschiedener Dielektrizitätskonstante verläuft die Größe der Lichtelektrizität in derselben Reihenfolge wie die Dielektrizitätskonstante der zugemischten Substanzen. Untersucht wurde dies mit den Dämpfen von Methylalkohol, Aceton, Chloroform, Benzol und auch Wasserdampf ordnet sich, wenn man die geringe Menge desselben, welche bei Zimmertemperatur vorhanden ist, in Betracht zieht, diesem Gesichtspunkt unter.

3. In einheitlichen Gasen von verhältnismäßig hoher Dielektrizitätskonstante, oder verhältnismäßig großen Werten von $D - 1$, ist die Lichtelektrizität beträchtlich gesteigert, gegenüber solchen mit geringen Werten dieser Größe. Untersucht wurde dies an Ammoniak: $D - 1 = 7,1 \times 10^{-3}$, das 5 mal so große Werte lieferte wie trockene Luft, für welche $D - 1 = 0,59 \times 10^{-3}$ ist; für Methyläther $D - 1 = 7,4 \times 10^{-3}$, welches 2,5fache und für Äthylen: $D - 1 = 1,4 \times 10^{-3}$, welches 1,8fache Empfindlichkeit wie trockene Luft liefert.

4. In allen vergleichbaren Fällen steigert die Vergrößerung der Dielektrizitätskonstante die Lichtelektrizität, bei starker Vergrößerung sehr erheblich, bis zum 5fachen; es ist daher auf eine primäre Abhängigkeit der letzteren von jener Konstante zu schließen.

Für alles, was ich an Anregung, Hilfe und Interesse empfing, erlaube ich mir, Hrn. Geheimen Hofrat Prof. Dr. Hallwachs, meinem verehrten Lehrer, herzlichsten Dank auszusprechen. Ebenso danke ich Hrn. Privatdozent Dr. Dember für seine liebenswürdige Unterstützung.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, im Juni 1913.

(Eingegangen 25. Oktober 1913.)

7. *Zur Theorie der optischen Abbildung;*
von M. v. Laue.

Im Jahrgang 1911 der Ann. d. Phys. beweist Hr. Mandelstam,¹⁾ angeregt durch gewisse, auf E. Abbe zurückgehende Beobachtungen,²⁾ einen Äquivalenzsatz über die Abbildung eines Körpers in den Fällen des Selbstleuchtens und fremder Beleuchtung. Obwohl wir diesem Satz vollkommen zustimmen, möchten wir doch auf die in ihm beantwortete Frage zurückkommen, weil ihm eine Reihe von Voraussetzungen zugrunde liegt, welche ihm von vornherein den Stempel einer Annäherung aufdrücken. Wir meinen damit hauptsächlich die Annahme einer relativ (d. h. verglichen mit der Lichtwellenlänge) groben Struktur. Es gibt aber auf diesem Gebiete einen streng gültigen Äquivalenzsatz, gültig für beliebige Körper und beliebig gebaute sowie beliebig eingestellte optische Instrumente. Von diesem soll im folgenden zunächst die Rede sein; die Mandelstamsche Formulierung des Satzes wird sich hinterher leicht als Annäherung für bestimmte Fälle daraus ableiten lassen.

Damit unser Problem überhaupt gestellt ist, muß gesagt werden, wie der Körper in dem einen Fall strahlen soll, d. h. mit welchen Intensitäten seine verschiedenen Teile nach den verschiedenen Richtungen leuchten sollen, und wie im anderen Falle die Intensität des fremden Lichtes von der Richtung abhängen soll. Auch die Kohärenzverhältnisse zwischen Strahlungen verschiedener Richtungen mit verschiedenen Ausgangspunkten müssen angegeben werden. Es liegt auf der Hand, daß die Behauptung, daß in beiden Fällen im Wesen gleiche Bilder entstehen, nur bei bestimmten Annahmen darüber, aber nicht im allgemeinen zutreffen kann. Über die fremde Strahlung machen wir zu diesem Zwecke die Annahme, daß sie von allen Seiten die gleiche ist, wie wenn sie von vollkommen

1) L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 35. p. 881. 1911.

2) Vgl. z. B.: Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von Ernst Abbe; herausgegeben von Otto Lummer und Fritz Reiche, Braunschweig 1910.

schwarzen, gleichtemperierten, den Gegenstand völlig umgebenden Wänden herrührte. Wäre dies wirklich der Fall, so könnten wir freilich dem Gegenstand mit unseren optischen Instrumenten gar nicht beikommen. Doch hindert nichts, vorzusetzen, daß wir ihm auch aus dem Objektiv des Instrumentes solche Strahlung zusenden. Jede Konstruktion ähnlich dem Gaußschen Okular würde dies zulassen. Im Falle des Selbstleuchtens aber soll der Körper strahlen, als wäre er auf der gleichen Temperatur, wie vorher die Wände. Diese Annahmen sollen natürlich nichts über die Energieverteilung im Spektrum aussagen; besteht in beiden Fällen gleiche Abbildung, so muß sie offenbar für jede Farbe einzeln bestehen. Es ist auch gar nicht notwendig, daß es sich um wirkliche Temperaturstrahlung handelt; im Gegenteil ist ihre Entstehung völlig gleichgültig. Nur die räumliche Verteilung der Strahlung nach den Richtungen und den Orten, von denen sie ausgeht, und ihre Kohärenzverhältnisse sollen durch unsere Annahmen gekennzeichnet werden.

Man könnte uns vielleicht entgegenhalten, daß damit in das Problem fremde, nämlich strahlungstheoretische Gesichtspunkte hineingezogen werden. Wir würden darauf erwidern, daß alle Strahlungstheorie in letzter Linie Statistik ist (oder sein sollte) und daß das Hineinziehen statistischer Betrachtungen hier unvermeidlich ist. Bei der bisherigen Behandlung derartiger Fragen geschah es stets durch die Unterscheidung zwischen kohärenten und inkohärenten Strahlen. Als Vorzug unseres Verfahrens möchten wir hinstellen, daß es die schwierigen Fragen vermeidet, wie sich die Kohärenz gestaltet, wenn wir die Brennflächen zweier in der Richtung übereinstimmender Strahlenbündel näher und näher rücken lassen oder zwei von derselben Brennfläche ausgehenden Strahlenbündeln mehr und mehr die gleiche Richtung geben. Die früheren Behandlungsweisen müssen, um diesen Fragen mit einigem Rechte aus dem Wege gehen zu können, die schon erwähnte Annahme der „groben“ Struktur machen.

Der eigentliche Beweis ist nun höchst einfach. Denken wir uns den Körper und seine Umgebung gleichzeitig in der angegebenen Weise strahlend, so sehen wir mit unserem Instrument in eine allseitig gleiche Hohlraumstrahlung hinein und können bekanntlich keinerlei Umrisse von deren Begrenzung

erkennen. Wir sehen unter allen Umständen gleichförmige Helligkeit. Diese setzt sich aber additiv zusammen aus den Bildern, welche der Körper nur im eigenen und nur im fremden Licht ergeben würde. Und das heißt: *Beide Bilder sind zueinander komplementär*. Dies ist offenbar die genaue Fassung des zu beweisenden Satzes; sie gilt, ob wir nun auf den Gegenstand „einstellen“ oder nicht.

Ein besonderer Fall ist, daß der Gegenstand völlig durchsichtig ist. In diesem Fall würde er niemals zum Selbstleuchten zu bringen, also im eigenen Lichte niemals sichtbar sein. Nach unserem Satze daher auch nicht bei allseitig gleicher Bestrahlung. Diesen besonderen Fall hat Hr. Siedentopf in einem Vortrage in München im Oktober 1911 genau nach der angegebenen Methode bewiesen. Es ist unter diesen Umständen außerordentlich verwunderlich, daß der Beweis für den allgemeinen Fall nicht schon bekannt ist; immerhin glauben wir, durch eine Anfrage bei einer Reihe von Fachgenossen, welche auf dem Gebiete der optischen Abbildung besonders bewandert sind, zweifelsfrei festgestellt zu haben, daß dies tatsächlich nicht der Fall ist.

Natürlich ist der praktischen Optik mit diesem streng gültigen Äquivalenzsatz wenig gedient, weil die allseitig gleiche Beleuchtung, wenn sie sich auch grundsätzlich stets verwirklichen ließe, doch als zu umständlich nie angewandt wird. Man kann aber leicht zeigen, daß diese Bedingung für eine nur angenäherte, aber praktisch ausreichende Gültigkeit des Äquivalenzsatzes in vielen Fällen nicht notwendig ist. Wenn z. B. der Körper auffallendes Licht weder diffus, noch regulär in merklichem Maße spiegelt, wird man auf Beleuchtung von der Seite des Objektives verzichten können, ohne viel gegenüber der allseitigen Bestrahlung zu ändern. Aber auch von den Strahlen, welche von der anderen Seite kommen, wird man alle weglassen können, welche nicht in das abbildende Instrument hineingelangen.

Wir wollen, um dies an einem Beispiel näher auszuführen, an die in Praxi meist vorliegenden Verhältnisse denken, d. h. an ein nahezu ebenes, wenig spiegelndes Objekt, zu dem senkrecht das axialsymmetrische Instrument und der axialsymmetrische Beleuchtungsapparat stehen, das erstere scharf auf das Objekt eingestellt. Das Objekt habe relativ grobe Struktur.

Ist dann a ($\gg \lambda$) eine Strecke, auf welche sich die Beschaffenheit des Objektes erheblich ändert, so genügt zu scharfer Abbildung eine numerische Apertur

$$\sin \vartheta \geq \frac{\lambda}{a}$$

(der Brechungsindex als 1 vorausgesetzt; anderenfalls bedeutet hier λ nicht die Wellenlänge im leeren Raum, sondern die bei dem Brechungsindex n). Zur Abbildung tragen dann ausschließlich Strahlen bei, welche aus einem Kegel von dem gleichen Öffnungswinkel ϑ kommen, da die Richtungsänderung durch Beugung an dem Objekt sich auf Winkel von der Ordnung λ/a beschränkt, welche gegen ϑ klein sind. Deshalb können wir alle anderen fortlassen, ohne daß der Äquivalenzsatz erheblich gefährdet würde. Diese Behauptung gilt erst recht, wenn die Apertur des abbildenden Instrumentes unter dem angegebenen Maß bleibt; denn dann sind bei der angegebenen Beleuchtung immer noch weit mehr Strahlen vorhanden, als zur Abbildung beitragen. Und wenn wir die Apertur über dies Maß vergrößern, ohne sonst etwas zu ändern, so bleibt das Bild im Fall fremder Beleuchtung ungeändert, da einfach die neu hinzukommenden Teile des Objektives vom Licht nicht ausgefüllt werden, somit unbenutzt bleiben; im Fall des Selbstleuchtens treten sie allerdings in Wirkung, ändern das Bild aber nur in der allgemeinen Helligkeit, weil es wegen der angenommenen groben Struktur schon vorher alle Einzelheiten zeigte. Es genügt somit bei grober Struktur des Objektes bei allen Werten der numerischen Apertur Beleuchtung aus einem Winkel ϑ , dessen Sinus gegen λ/a groß ist, um ein Bild zu erzeugen, welches zum Bild beim Selbstleuchten komplementär ist. So finden wir hier als eine Annäherung die Mandelstamsche Form des Äquivalenzsatzes wieder.

Auch in den Fällen, in welchen enge Spalte als Blenden in das abbildende Instrument eingeschaltet sind, läßt sich stets leicht angeben, wieweit man die beleuchtende Strahlen beschränken darf, damit der Äquivalenzsatz näherungsweise gültig bleibt; man gelangt auf diese Weise zu Ergebnissen, welche mit denen von Hrn. Mandelstam übereinstimmen.

Zürich, November 1913.

(Eingegangen 5. November 1913.)

ffen.
Ab-

utet
bei
ließ-
chen
urch
ung
inen
er-
echt,
an-
nen
zur
Maß
im
hun-
füllt
tens
er in
nen
hügt
der
ssen
zum
hier
qui-

in
tets
be-
ältig
mit